9. Flächenmessung mit Integralen

9.1 Flächen mit ausschließlich positiven bzw. ausschließlich negativen Randfunktionen

Bis jetzt haben wir den unmittelbaren Zusammenhang zwischen dem Integral einer Funktion f in den Grenzen von a und b und der Flächenmessung für Randfunktionen mit nicht negativen Werten gesichert. Es gilt:

Satz: *(Flächen zwischen Randfunktionen mit nicht negativen Werten und der x-Achse)*

Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und ist $f(x)\geq 0$ für alle $x\in [a,b]$, dann ist das Maß $|A|$ der Fläche A zwischen dem Graph der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall [a,b] feststellbar durch:

$$|A| = \int_a^b f(x)\,dx$$

Nun wird untersucht, ob mit Hilfe des Integrals auch anders gelagerte Flächen sinnvoll gemessen werden können. Wir betrachten zunächst das Beispiel einer Funktion, deren Graph über dem betrachteten Intervall ganz im Negativen verläuft.

Beisp: *(Integral über eine Funktion mit nur negativen Werten)*

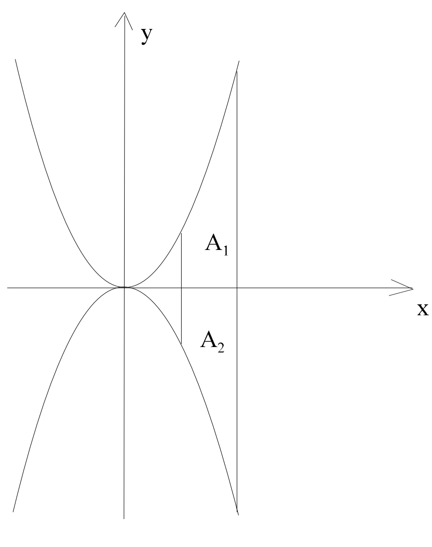
f sei gegeben durch die Gleichung $f(x) = -x^2$. Berechne das Integral über f von 1 bis 2!

$$\int_1^2 -x^2\,dx = -\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = -\frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

Der Wert des errechneten Integrals ist negativ, kann also kein Flächenmaß sein. Wir vergleichen das errechnete Integral mit dem Integral der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = x^2$ in den selben Grenzen und erhalten:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Beide Ergebnisse unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen, das heißt, sie haben gleichen Betrag; in geometrischer Betrachtungsweise ergibt sich aus der Kongruenz der entsprechenden Flächenstücke, dass deren Flächenmaße gleich sind, wie man dem Vergleich der beiden Flächen A_1 und A_2 in der Graphik auch anschaulich entnehmen kann.



Es liegt im Anschluss an das Beispiel nahe, den folgenden Satz zu formulieren, der die Ergebnisse der Messung ausschließlich nicht negativ berandeter beziehungsweise ausschließlich nicht positiv berandeter Flächen zusammenführt.

Satz: *(Messung ausschließlich nicht positiv beziehungsweise ausschließlich nicht negativ berandeter Flächen)*

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion für die genau eine der beiden folgenden Bedingungen (1), (2) gilt.

(1) $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$

(2) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$

Das Maß $|A|$ der Fläche A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [a,b] wird errechnet durch:

$$|A| = \left| \int_a^b f(x)\ dx \right|$$

Bew: Die Richtigkeit des Satzes für nicht negative Randfunktionen ist bereits klar, denn in diesem Fall bedeutet das Integral ein Flächenmaß, also eine nicht negative Zahl und damit gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| = \int_a^b f(x)\ dx$$

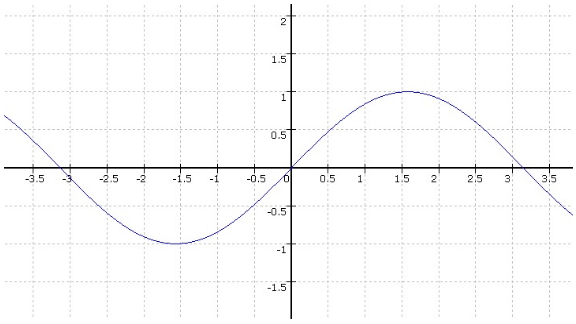
Im Falle einer nicht positiv berandeten Funktion ergibt sich die Behauptung nach Spiegelung der betrachteten Fläche an der x-Achse und anschließender Messung.

9.2 Flächen mit Randfunktionen, die positive und auch negative Werte besitzen

Für den Fall, dass die Randfunktion im betrachteten Intervall [a,b] sowohl positive als auch negative Werte aufweist, liefert die Berechnung des Integrals keine unmittelbar auswertbaren Informationen hinsichtlich des Flächenmaßes der Fläche M zwischen der x-Achse und dem Graphen von f, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beisp: *(Fläche zwischen der Sinus-Kurve und der x-Achse)*

Gesucht ist das Maß der zweigeteilten Fläche A zwischen der Sinus-Kurve und der x-Achse über dem Intervall $[\,-\pi,\pi]$.



Zunächst berechnen wir versuchsweise das Integral über die Sinus-Funktion in den Grenzen -π bis π und erhalten:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, dx = -\cos(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi) = 0$$

Das Ergebnis dieser Rechnung liefert augenscheinlich keinen unmittelbaren Zusammenhang mit dem gesuchten Flächenmaß. Man muss folglich den über der x-Achse gelegenen Teil der Gesamtfläche getrennt von dem darunter liegenden berechnen und findet:

$$|A| = \left| \int_{-\pi}^{0} \sin(x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{\pi} \sin(x)\, dx \right| = \left| -\cos(x) \Big|_{-\pi}^{0} \right| + \left| -\cos(x) \Big|_{0}^{\pi} \right| = 2 + 2 = 4$$

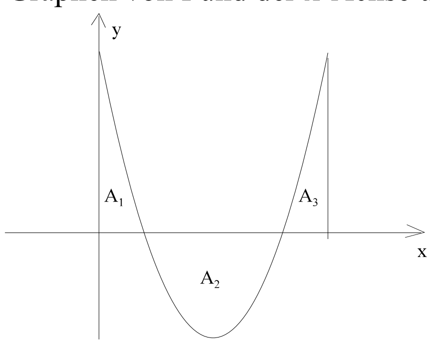
Das Beispiel führt auf die Rechenregel für das Messen von Flächen, die sowohl oberhalb als auch unterhalb der x-Achse liegen:

Satz: *(Messen von Flächen, die sowohl ober- als auch unterhalb der x-Achse verlaufen)*

Das Maß einer Fläche A zwischen dem Graph einer stetigen Funktion f und der x-Achse über dem Intervall [a,b] wird nach folgendem Verfahren berechnet:
(1) Man berechnet die Nullstellen $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ von f im Intervall [a,b].
(2) Man berechnet die Flächen über den durch die Nullstellen begrenzten Teilstücken des Intervalls [a,b] separat
(3) Man addiert die gefundenen Teil-Maße.

Beisp: *(Messen einer Fläche, die sowohl ober- als auch unterhalb der x-Achse verläuft)*

Gegeben ist die Funktion f über $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Berechne das Maß der Fläche A zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [0,5]!



Zur Berechnung der Teilflächen A_1, A_2, A_3, errechnet man die Nullstellen von f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

Die Berechnung der Gesamtfläche A umfasst folgende Schritte:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \left|\int_1^4 f(x)\,dx\right| + \left|\int_4^5 f(x)\,dx\right| =$$

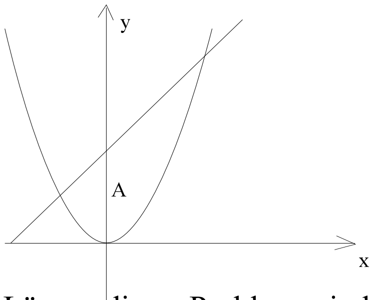
$$\left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_1^4\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_4^5\right| =$$

$$\left|\frac{11}{6}\right| + \left|-\frac{27}{6}\right| + \left|\frac{11}{6}\right| = \frac{49}{6}$$

9.3 Flächen zwischen Graphen von Funktionen f und g mit g>f

Beisp: *(Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen)*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x)=x^2$ und $g(x)=x+2$ eingeschlossen ist!



Zur Lösung dieses Problems sind zunächst die Schnittstellen der Graphen von f und g zu bestimmen; man erhält:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \vee x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Die Fläche zwischen den beiden Graphen wird bestimmt, indem zunächst die zu große Fläche unter dem Graph von g im Intervall [-1,2] gemessen wird, und danach das Maß der Fläche unter dem Graph von f (dunkel gekennzeichnet) abgezogen wird, welches den zu viel gemessenen Teil beschreibt.

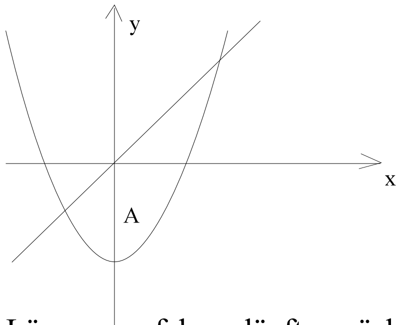
$$|A| = \int_{-1}^{2} g(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{2} x^2\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 6 - \left(-\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Auf dem Weg zu einem schlüssigen Verfahren zur Berechnung der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen betrachten wir ein ähnliches Beispiel:

Beisp: *(Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen)*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x)=x^2-2$ und $g(x)=x$ eingeschlossen ist!



Das Lösungsverfahren läuft zunächst analog dem Vorgehen im letzten Beispiel; man erhält für die Schnittpunkte wieder x=-1 und x=2. Die Berechnung des Flächenmaßes kann man sich auf verschiedene Weisen überlegen: Recht unübersichtlich über die Zerlegung in positiv und negativ berandete Flächen, einfacher aber, wenn man sofort erkennt, dass das Flächenmaß gleich 4,5 sein muss, weil die gemessene Fläche aus derjenigen, die im vorigen Beispiel berechnet wurde, durch eine Verschiebung um -2 in y-Richtung hervorgegangen ist, also flächengleich ist.

Anhand der Idee zur schnellen Lösung des eben gerechneten Beispiels findet man das verallgemeinerte Lösungsverfahren zur Berechnung der Fläche A zwischen den Graphen zweier Funktionen f und g über dem Intervall [a,b], wobei der Graph von g oberhalb des Graphen von f verlaufen soll, also für alle $x \in [a,b]$ vorausgesetzt wird, dass $g(x) \geq f(x)$. Sind F und G die entsprechenden Stammfunktionen von f und g, findet man:

- Wenn f und g im Intervall [a,b] beide nur nicht negative Werte haben, gilt:

$$|A| = \int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \left[G(x) - F(x)\right]_{a}^{b}$$

- Wenn bei g bzw. f im Intervall [a,b] auch negative Funktionswerte vorkommen, schiebt man die zu berechnende Fläche A so weit nach oben, dass keine negativen Werte mehr auftauchen; rechnerisch bedeutet diese Verschiebung, dass f (x) durch f(x)+c und g(x) durch g(x)+c ersetzt wird, wobei c ausreichend groß gewählt werden muss. Man erhält so:

$$|A| = \int_a^b (g(x) + c)\,dx \; - \int_a^b (f(x)+c)\,dx = \Big[\, G(x) + cx - (F(x) + cx)\,\Big]_a^b =$$

$$\Big[\, G(x) - F(x)\,\Big]_a^b = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

Also führen die beiden diskutierten Fälle auf dieselbe Formel; der folgende Satz fasst zusammen:

Satz: *(Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen)*

Sind *f und g zwei auf einem Intervall [a,b] stetige Funktionen mit Stammfunktionen F und G, für die gilt: g(x)≥f(x) für alle x∈[a,b], dann berechnet man das Maß der Fläche A, die von den Graphen von f und g über dem Intervall [a,b] eingeschlossen wird, durch:*

$$|A| = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

9.4 Flächen zwischen Funktionsgraphen im Allgemeinen

Das folgende Beispiel beschäftigt sich mit dem Fall, dass die Graphen von f und g über dem Intervall [a,b] nicht ständig auf der selben Seite voneinander liegen, dass also die im vorigen Abschnitt gestellte Bedingung g(x)≥f(x) für alle x∈[a,b] nicht erfüllt ist.

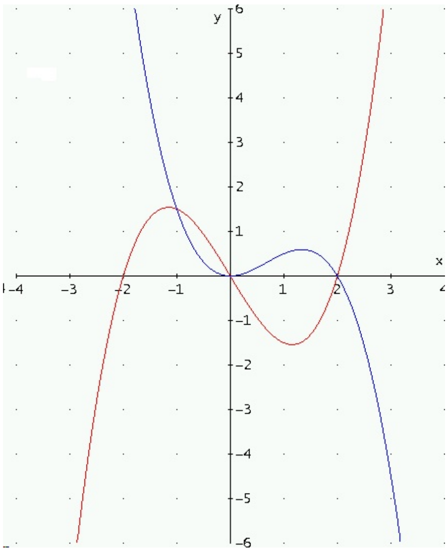
Beisp: *(Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen)*

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g über ihre Gleichungen:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2$$

Welches Maß hat die Fläche A, die von den Graphen von f und g eingeschlossen ist?

Zur Orientierung zunächst eine Zeichnung der Graphen:



Man berechnet die Schnittstellen von f und g:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 2x = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -1$$

Die benötigten Flächenstücke werden zusammengesetzt:

$$|A| = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{2} (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx + \int_{0}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{0}^{2} = 0 - \left(-\frac{5}{12}\right) + \frac{8}{3} - 0 = \frac{37}{12}$$

Unter Umständen erkennt man ohne eine Zeichnung nicht sofort, in welchen Intervallen der Graph von f oberhalb des Graphen von g und wann unterhalb verläuft. Eine Vertauschung des oberen und unteren Graphen führt jedoch lediglich zu einem Vorzeichenfehler, denn:

$$\int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx = F(b) - G(b) - F(a) + G(a)$$

$$\int_{a}^{b} (g(x) - f(x))\,dx = G(b) - F(b) - G(a) + F(a)$$

Auf jeden Fall gilt also:

Satz: *(Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen)*

Sind *f und g zwei auf einem Intervall [a,b] stetige Funktionen mit Stammfunktionen F und G, dann berechnet man das Maß der Fläche A, die von den Graphen von f und g zwischen zwei Schnittstellen s_1 und s_2 über dem Intervall [a,b] eingeschlossen wird, durch:*

$$|A| = \left| \int_{s_1}^{s_2} (f(x) - g(x))\, dx \right|$$

Wir ergänzen an dieser Stelle noch den Mittelwertsatz der Integralrechnung, welcher sich gut durch Flächenbetrachtungen plausibel machen lässt.

Satz: *(Mittelwertsatz der Integralrechnung)*

Ist f eine auf einem Intervall [a,b] stetige Funktionen F, dann gilt für eine Zahl $\xi \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Graphisch an einem Beispiel veranschaulicht wird der Inhalt des Satzes klar:

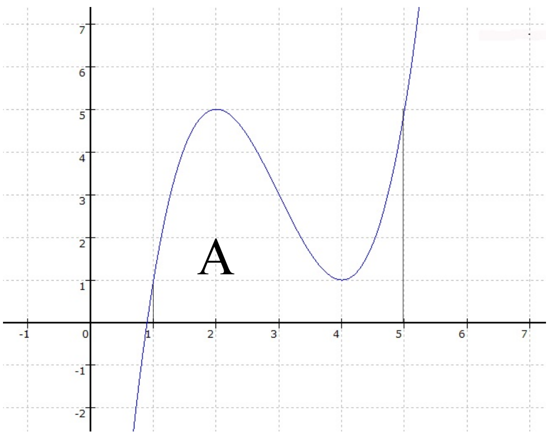
Beisp: *(Mittelwertsatz der Integralrechnung)*

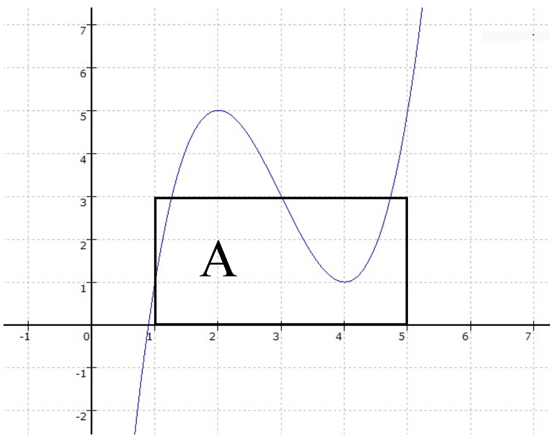
Wir berechnen ein Integral über eine Polynomfunktion 3. Grades :

$$\int_1^5 (\ x^3 - 9x^2 + 24x - 15\ )\ dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 - 15x \right]_1^5 =$$

$$\frac{625}{4} - 375 + 300 - 75 - \frac{1}{4} + 3 - 12 + 15 = 12$$

Man erkennt (links), dass der Integralwert 12 dem Maß einer Fläche A direkt gleichzusetzen ist:





Der Mittelwertsatz der Integralrechnung sagt in dieser Situation, wo a=1 und b=5, dass diese Fläche A maßgleich mit einem Rechteck ist, dessen eine Seite gleich der Länge b-a = 4 des Integrationsintervalls ist, die andere Seite gleich dem Funktionswert an einer Stelle $\xi \in [a,b] = [1,5]$ ist (rechts).

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi) \Leftrightarrow \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 24x - 15)\,dx = 12 = (5-1)\cdot f(\xi)$$

Man weiß also, dass $f(\xi) = 3$ sein muss, erkennt aber, dass die Zahl ξ nicht eindeutig festgelegt ist, denn mehrere Zahlen aus dem Integrationsintervall [1,5] liefern nach der Zeichnung offensichtlich den Funktionswert 3. Es ist auch nicht immer möglich, die Zahl ξ definitiv auszurechnen, der Satz liefert nur die Garantie ihrer Existenz. Hier in diesem Beispiel aber gelingt die Ausrechnung (ausnahmsweise) doch, wobei die vorkommende Polynomdivision nicht vorgeführt ist:

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 15 = 3 \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 24x - 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)\cdot(x^2 - 6x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \lor x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \lor x^2 - 6x + 3^2 = 3 \Leftrightarrow x = \xi = 3 \lor x = \xi = 3 + \sqrt{3} \lor x = \xi = 3 - \sqrt{3}$$

Aus dem Beispiel erkennt man, dass $f(\xi)$ als mittlerer Funktionswert über dem Intervall [a,b] dient, den man konstant als "gleichmäßigen Ersatz" für alle anderen setzen könnte. Entsprechend rechnet man auch im Allgemeinen mittlere Funktionswerte aus:

Def.: *(Mittlerer Funktionswert)*

Ist f eine auf einem Intervall [a,b] integrierbare Funktion, dann errechnet sich der mittlere Funktionswert MF über diesem Intervall durch

$$MF = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

9.5 Unendliche Flächen

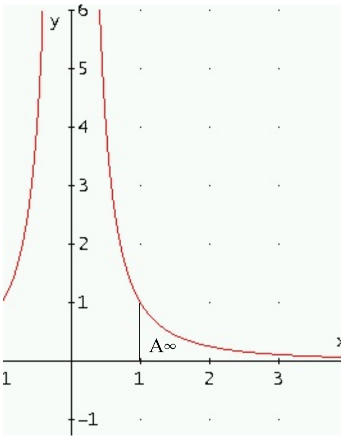
Den Abschluss der Behandlung des Problemkreises "Flächenmessung" bildet die Betrachtung des Flächenmaßes zu unendlichen Flächen; erstaunlicherweise wird sich dabei herausstellen, dass nicht jede unendliche Fläche ein unendliches Flächenmaß hat. Dazu zunächst einige Beispiele:

Beisp: *(Unendliche Fläche mit endlichem Flächenmaß)*

Gegeben ist die Funktion f über ihre Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad .$$

Es soll das Maß der in der Zeichnung angedeuteten Fläche A_∞ zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse über dem Intervall $[1,\infty]$ untersucht werden.



Dazu wird zunächst die Fläche A_z zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse über dem Intervall [1,z] errechnet und danach der Grenzwert für z gegen unendlich gebildet.

$$|A_z| = \int_1^z \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^z x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^z = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^z = -\frac{1}{z} + 1$$

$$|A_\infty| = \lim_{z\to\infty} |A_z| = \lim_{z\to\infty} -\frac{1}{z} + 1 = 1$$

Die Zuordnung des Flächenmaßes 1 zu der unendlichen Fläche A_∞ ist damit sinnvoll.

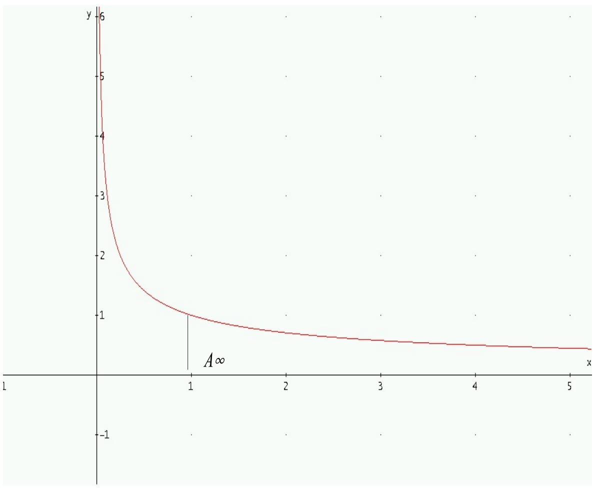
Im nächsten Beispiel wird eine ähnliche Funktion über demselben Intervall untersucht, die aber kein endliches Flächenmaß zu der vergleichbaren unendlichen Fläche aufweisen kann.

Beisp: *(Unendliche Fläche mit unendlichen Flächenmaß)*

Gegeben ist die Funktion f über ihre Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad .$$

Es soll das Maß der in der Zeichnung angedeuteten Fläche M_∞ zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse über dem Intervall [1,∞] untersucht werden. Hier der Graph der Funktion:



Die Rechnung ergibt, dass hier A_∞ kein endliches Flächenmaß aufweist:

$$|A_z| = \int_1^z \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^z x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^z = \left[2\sqrt{x}\right]_1^z = 2\sqrt{z} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{z} - 2$$

$$|A_\infty| = \lim_{z\to\infty} |A_z| = \lim_{z\to\infty} 2\sqrt{z} - 2 = \infty$$

Betrachten wir die beiden Beispielfunktionen zu unendlichen Flächen unter einem anderen Blickwinkel; eine unendlich ausgedehnte Fläche kann man jeweils auch zwischen der y-Achse und dem Graph der Funktion, also über dem Intervall [0,1], erkennen. Die Rechnung erfordert in beiden Fällen, dass man zunächst die nicht definierte Grenze 0 durch ein fiktives z ersetzt und anschließend den Grenzwert für z gegen 0 kalkuliert.

Beisp: *(Unendliche Fläche an einer Definitionslücke mit unendlichem Flächenmaß)*

Gegeben ist die Funktion f über ihre Gleichung: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Es soll das Maß der Fläche A zwischen dem Funktionsgraphen und der y-Achse über dem Intervall [0,1] untersucht werden.

$$|A_z| = \int_z^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_z^1 x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_z^1 = \left[-\frac{1}{x}\right]_z^1 = -1 + \frac{1}{z}$$

$$|A_\infty| = \lim_{z\to 0} |A_z| = \lim_{z\to 0} -1 + \frac{1}{z} = \infty$$

Beisp: *(Unendliche Fläche an einer Definitionslücke mit endlichem Flächenmaß)*

Gegeben ist die Funktion f über ihre Gleichung: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Es soll das Maß der Fläche A zwischen dem Funktionsgraphen und der y-Achse über dem Intervall [0,1] untersucht werden. Man rechnet:

$$|A_z| = \int_z^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_z^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_z^1 = \left[2\sqrt{x}\right]_z^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{z} = 2 - 2\sqrt{z}$$

$$|A_\infty| = \lim_{z\to 0} |A_z| = \lim_{z\to 0} 2 - 2\sqrt{z} = 2$$

Integrale der in den vorigen Beispielen betrachteten Art heißen **uneigentliche Integrale**. Es gibt zwei Möglichkeiten, uneigentliche Integrale zu bilden; entweder ist mindestens eine der Integrationsgrenzen + ∞ oder - ∞, oder die zu integrierende Funktion hat an mindestens einer Stelle des Integrationsintervalls eine Unendlichkeits- oder Unstetigkeitsstelle.