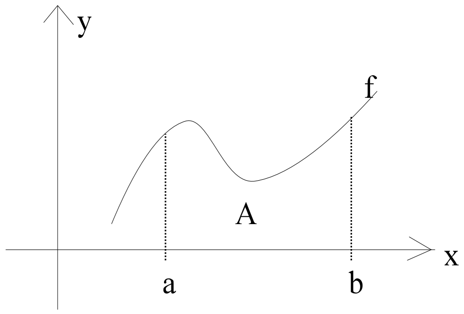
8. Flächenmaße

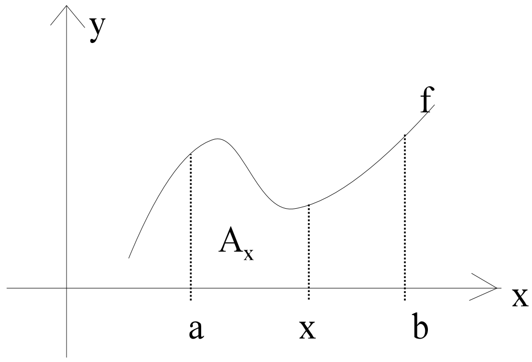
8.1 Flächenmaßfunktionen zu nicht negativen Randfunktionen

Wir wenden uns einem auf den ersten Blick neuen Thema zu, der Ermittlung des Flächenmaßes $|A|$ von Flächen A, die vom nicht unterhalb der x-Achse verlaufenden Graph einer Funktion f und der x-Achse über dem Intervall [a,b] begrenzt sind; man nennt f Randfunktion der Fläche A.



Zu messen ist also die Punktmenge $A = \{ (x/y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x) \}$. In diesem Zusammenhang stellt man folgende Fragen: Kann man A für beliebige Funktionen f messen? Findet man ein Rechenverfahren zur Lösung des Messproblems?

Stellt man sich die Flächenmessung unter einer Randfunktion als dynamischen Prozess vor, dann streicht ein Schieber von a nach b über die Fläche A hinweg, der nach einer gewissen Zeit eine Teilfläche A_x von A zwischen a und einer Zahl x mit $a\leq x\leq b$ überstrichen hat.



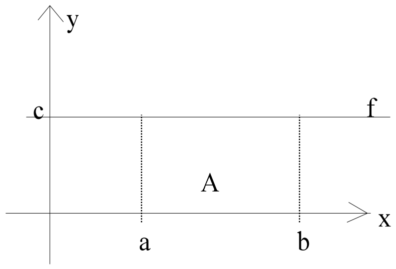
Die Maße der Teilflächen A_x ergeben Werte einer streng monoton steigenden Funktion:

> **Def**: *(Flächenmaßfunktion zu nicht negativen Randfunktionen)*
>
> *$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ sei eine nicht negative Randfunktion. Die Funktion $M_f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ mit*
>
> *$M_{f,a}(x)$ = Maß der Fläche A_x unter G_f über dem Intervall $[a,x]$*
>
> *heißt Flächenmaßfunktion zu f.*

8.2 Flächen unter geradlinigen nicht negativen Randfunktionen

Beisp: *(Fläche unter einer positiven, konstanten Funktion)*

Gegeben ist die Randfunktion f mit f(x) = c ($c \in \mathbb{R}^+$).



Man rechnet: $|A| = (b-a) \cdot c = cb - ca$

Eine Flächenmaßfunktion ist: $M_{f,a}(x) = c\,(x-a) = cx - ca$

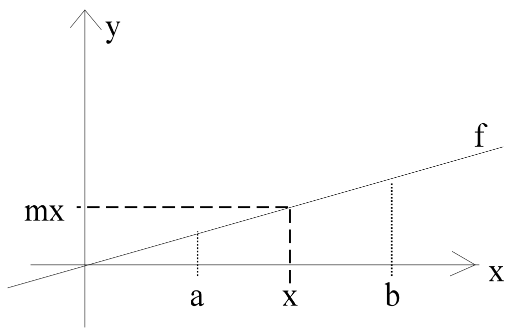
Ist speziell a=0, misst man also ab der y-Achse, erhält man $M_{f,0}(x) = cx$. Mit Hilfe dieser Funktion $M_{f,0}$ kann man in diesem Fall bequem rechnen:

$|A| = M_{f,0}(b) - M_{f,0}(a) = cb - ca$

Bei anderen geradlinigen Randfunktionen findet man auf ähnliche Art Lösungen des Flächenmaßproblems.

Beisp: *(Flächenmaß unterhalb einer nicht negativen linearen Funktion f mit f(x) = mx)*

Der Graph einer Funktion f mit f(x) = mx ist eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung m.



Man ermittelt die Gleichung der Flächenmaßfunktion $M_{f,0}$ über die Dreiecksflächenformel und berechnet darüber das Maß von A:

$$M_{f,0}(x) = \frac{1}{2}\, x \cdot mx = \frac{1}{2}\, m\, x^2$$

$$|A| = M_{f,0}(b) - M_{f,0}(a) = \frac{1}{2}\, mb^2 - \frac{1}{2}\, ma^2$$

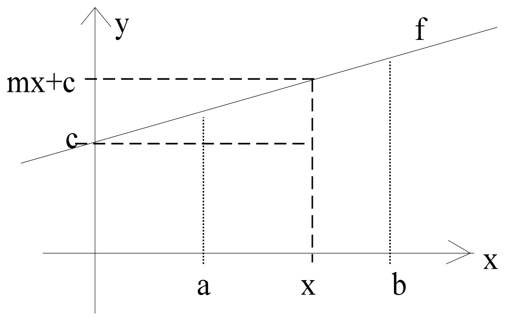
Bei Verwendung einer anderen Flächenmaßfunktion $M_{f,a}$ statt $M_{f,0}$ findet man das gleiche Ergebnis:

$$M_{f,a}(x) = \frac{1}{2}\,m\,x^2 - \frac{1}{2}\,m\,a^2$$

$$|A| = M_{f,a}(b) - M_{f,a}(a) = \frac{1}{2}\,mb^2 - \frac{1}{2}\,ma^2 - \frac{1}{2}\,m\,a^2 + \frac{1}{2}\,m\,a^2 = \frac{1}{2}\,mb^2 - \frac{1}{2}\,ma^2$$

Beisp: *(Flächenmaß unterhalb des Graphen einer positiven Funktion f ersten Grades)*

Der Graph einer Funktion ersten Grades mit der Gleichung f(x) = mx + c (c>0) hat die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c. Die zugehörige Gerade verlaufe nur oberhalb der x-Achse.



Man ermittelt die Gleichung der Flächenmaßfunktion $M_{f,0}$ durch Kombination der beiden vorangegangenen Beispiele und findet:

$$M_{f,0}(x) = \frac{1}{2}\,mx^2 + cx$$

$$|A| = M_{f,0}(b) - M_{f,0}(a) = \frac{1}{2}\,mb^2 + cb - \frac{1}{2}\,ma^2 - ca$$

Auch hier ergibt sich - wie man selbständig nachprüfen kann - bei Verwendung anderer Flächenmaßfunktionen $M_{f,a}$ mit der Gleichung

$$M_{f,a}(x) = \frac{1}{2}\,mx^2 + cx - \frac{1}{2}\,ma^2 - ca$$

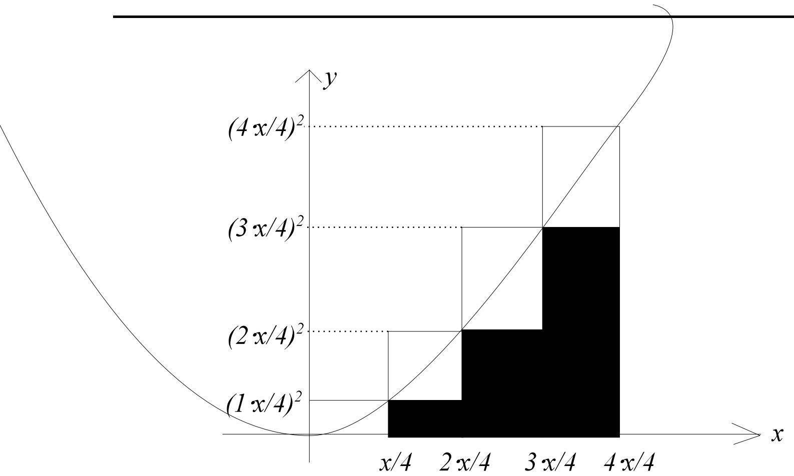
kein anderes Ergebnis.

8.3 Eine Flächenmaßfunktion zu einer krummlinigen nicht negativen Randfunktion

Bei krummlinig berandeten Flächen hat man oft keine geometrische Lösung parat, die den Term einer Flächenmaßfunktion liefern könnte. Deshalb versucht man ein Näherungsverfahren.

Beisp: *(Flächenmaßfunktion zur Quadratfunktion im ersten Quadranten)*

Wir betrachten die Fläche unter dem Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^2$ über dem Intervall [0,x]. Dieses Intervall wird in gleiche Teile zerlegt. Anhand der Zerlegungspunkte wird, wie in der Zeichnung anhand einer vierfachen Zerlegung demonstriert, eine untere Näherung und eine obere Näherung über die entsprechenden “Treppenflächen” möglich. Die Fläche der unteren Treppe zu einer vierfachen Zerlegung von [0,x] nennt man Untersumme U_4, die der oberen Treppe Obersumme O_4.



Die Berechnung der Untersumme U_4 und der Obersumme O_4 ergibt:

$$U_4 = \frac{x}{4}\left(\frac{1x}{4}\right)^2 + \frac{x}{4}\left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \frac{x}{4}\left(\frac{3x}{4}\right)^2 =$$

$$\frac{x}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot 1^2 + \frac{x}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot 2^2 + \frac{x}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^2\cdot 3^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^3\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$$

$$O_4 = \frac{x}{4}\left(\frac{1x}{4}\right)^2 + \frac{x}{4}\left(\frac{2x}{4}\right)^2 + \frac{x}{4}\left(\frac{3x}{4}\right)^2 + \frac{x}{4}\left(\frac{4x}{4}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^3\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$$

In gleicher Weise wie bei der Berechnung von O_4 und U_4 geht man geht man auch bei anders gestaffelten Zerlegungen des Intervalls [0,x] vor; hier einige Ergebnisse:

n	O_n	U_n
2	$\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\left(1^2 + 2^2\right)$	$\left(\frac{x}{2}\right)^3\cdot\left(1^2\right)$
4	$\left(\frac{x}{4}\right)^3\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2\right)$	$\left(\frac{x}{4}\right)^3\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)$
8	$\left(\frac{x}{8}\right)^3\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2\right)$	$\left(\frac{x}{8}\right)^3\cdot\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 7^2\right)$

Im Allgemeinen erhält man so bei k-facher Zerlegung:

$$U_k = \left(\frac{x}{k}\right)^3\cdot\left(1^2 + \ldots + (k-1)^2\right) = \left(\frac{x}{k}\right)^3\cdot\sum_{i=1}^{k-1} i^2$$

$$O_k = \left(\frac{x}{k}\right)^3\cdot\left(1^2 + \ldots + (k-1)^2 + k^2\right) = \left(\frac{x}{k}\right)^3\cdot\sum_{i=1}^{k} i^2$$

Um das Maß der Fläche unter der Quadratfunktion zunehmend genauer einzugrenzen, lässt man die Zerlegungen feiner werden; dabei gilt: Je feiner die Zerlegung ist, desto genauer wird die Schätzung des Flächenmaßes. Man kann auch sagen: Je größer in den oben genannten Formeln für U_k und O_k die Zahl k ist, desto genauer ist die Schätzung. Damit liegt es nah, Grenzwerte für $k \to \infty$ zu berechnen, also "unendlich fein" zu unterteilen und das Ergebnis auf seine Tauglichkeit als Flächenmaß zu untersuchen. Mit Hilfe der Formel (siehe Kapitel zur vollständigen Induktion)

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\, n\, (n+1)\, (2n+1)$$

rechnet man:

$$O_k = \frac{x^3}{k^3}\frac{1}{6}\,k\,(k+1)\,(2k+1) = x^3\,\frac{1}{6}\,\frac{k}{k}\,\frac{k+1}{k}\,\frac{2k+1}{k} = x^3\,\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(2+\frac{1}{k}\right)$$

$$U_k = \frac{x^3}{k^3}\frac{1}{6}\,(k-1)\,k\,(2k-1) = x^3\,\frac{1}{6}\,\frac{k-1}{k}\,\frac{k}{k}\,\frac{2k-1}{k} = x^3\,\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(2-\frac{1}{k}\right)$$

Berücksichtigt man, dass $U_k < M_{f,0}(x) < O_k$, stellt man fest:

$$\lim_{k\to\infty} U_k = \frac{1}{3}\,x^3 \le M_{f,0}(x) \le \frac{1}{3}\,x^3 = \lim_{k\to\infty} O_k$$

Also ist für die Quadratfunktion:

$$M_{f,0}(x) = \frac{1}{3}\,x^3$$

Damit erhält man auch einen Term für die verallgemeinerte Flächenmaßfunktion $M_{f,a}$:

$$M_{f,a}(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{3}\,a^3$$

8.4 Das Integral und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

8.4.1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für nicht negative Randfunktionen

Wir vergleichen Flächenmaßfunktionen $M_{f,a}$ und $M_{f,0}$ und mit Stammfunktionen F:

f(x)	$M_{f,a}(x)$	$M_{f,0}(x)$	F(x)
c	cx - ca	cx	cx + C
mx	$\frac{1}{2}\,mx^2 - \frac{1}{2}\,ma^2$	$\frac{1}{2}\,mx^2$	$\frac{1}{2}\,mx^2 + C$
mx + c	$\frac{1}{2}\,mx^2 + cx - \frac{1}{2}\,ma^2 - ca$	$\frac{1}{2}\,mx^2 + cx$	$\frac{1}{2}\,mx^2 + cx + C$
x^2	$\frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{3}\,a^3$	$\frac{1}{3}\,x^3$	$\frac{1}{3}\,x^3 + C$

In den bisherigen Beispielen, die der Bestimmung von Flächen unter nicht negativen Randfunktionen f dienten, deckten sich die Funktionsterme der aufgefundenen Flächenmaßfunktionen $M_{f,a}$ und $M_{f,0}$ immer mit dem Funktionsterm einer Stammfunktion F von f. Es scheint also ein Zusammenhang zwischen der Flächenmessung unter dem Graph einer Randfunktion f und dem Berechnen von Stammfunktionen von f zu bestehen. Man vermutet einen solchen Zusammenhang für alle stetigen Randfunktionen, weil jede stetige Funktion eine Stammfunktion aufweist. Unsere bisherigen Überlegungen lassen also folgenden Satz plausibel erscheinen:

Satz: *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Flächenmaßfunktionen nicht negativer - Randfunktionen)*

$f:[a,b] \to R_0^+$ sei eine auf [a,b] stetige Randfunktion. Dann ist eine zugehörige Flächenmaßfunktion $M_{f,a}$ Stammfunktion zu f.

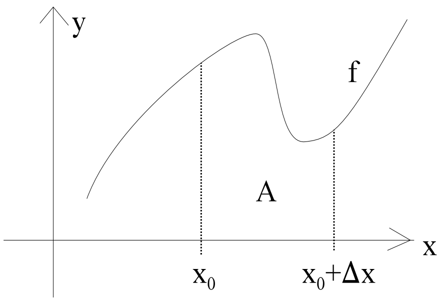
Bew: Zu zeigen ist, dass $M_{f,a}$ eine auf dem Intervall [a, b] differenzierbare Funktion ist. Außerdem muss gelten $M_{f,a}'(x_0) = f(x_0)$ für alle $x_0 \in [a,b]$. Dazu zeigt man, dass für alle $x_0 \in [a,b]$ gilt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

Der Zähler des auftretenden Differenzenquotienten lässt sich graphisch veranschaulichen; dabei ergeben sich unterschiedliche Aspekte je nach dem, ob Δx positiv oder negativ ist.

Wir betrachten zunächst den

1. Fall Δx>0: Für die in der Zeichnungen gekennzeichnete Fläche A unter dem Graphen von f gilt:

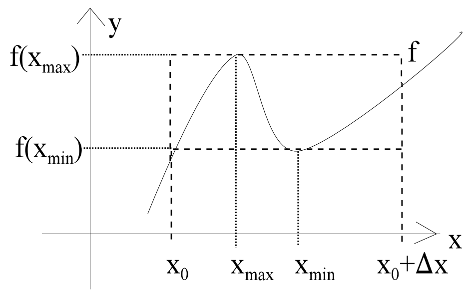


$|A| = M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)$

|A| wird mit Hilfe des Minimums $f(x_{min})$ beziehungsweise des Maximums $f(x_{max})$ der Funktion f auf dem Intervall $[x_0, x_0+\Delta x]$ und der Länge Δx des Intervalls geschätzt:

(1) $f(x_{min})\cdot\Delta x \le |A| \le f(x_{max})\cdot\Delta x \Leftrightarrow f(x_{min})\cdot\Delta x \le M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0) \le f(x_{max})\cdot\Delta x$

Die Zeichnung zeigt die Rechtecke, die zur Schätzung verwendet werden:



Anmerkung:
Dass eine Minimumstelle x_{min} beziehungsweise eine Maximumsstelle x_{max} überhaupt wie angenommen existieren, resultiert aus der verlangten Stetigkeit der Randfunktion f, genauer aus dem Satz vom Minimum und Maximum für stetige Funktionen, der lautet: Auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktionen haben dort ein Minimum und ein Maximum.

Dividiert man die Gleichung (1) durch Δx, findet man:

$$f(x_{min}) \le \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} \le f(x_{max})$$

Da wir den Fall $\Delta x \to 0$ betrachten, liegen die Zahlen x_{min} und x_{max} unendlich nah bei x_0. Da f eine stetige Funktion ist, liegen dann auch die Zahlen $f(x_{min})$ und $f(x_{max})$ unendlich nah der Zahl $f(x_0)$. Es ergibt sich:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} f(x_{min}) \le \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} f(x_{max}) \Leftrightarrow$$

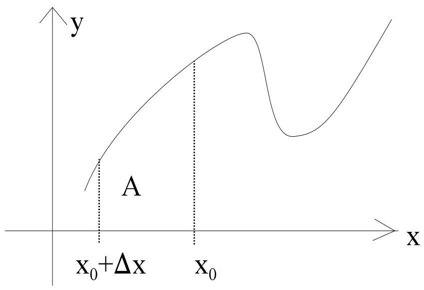
$$f(x_0) \le \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0)$$

Also ist:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

Damit ist die rechtsseitige ($\Delta x>0$) Differenzierbarkeit der Funktion $M_{f,a}$ an der Stelle x_0 wunschgemäß nachgewiesen. Linksseitig berechnet man vergleichbar den

2. Fall Δx<0: Die Zeichnung stellt sich für den Fall Δx<0 so dar:



Das Maß der Fläche A errechnet sich durch

$|A| \;=\; M_{f,a}(x_0) - M_{f,a}(x_0+\Delta x)$

Man schätzt |A| vergleichbar wie im Fall $\Delta x>0$ und findet, weil die Intervalllänge bei negativem Δx gleich $|\Delta x| = -\Delta x$ beträgt:

$$f(x_{min})\cdot(-\Delta x) \le |A| \le f(x_{max})\cdot(-\Delta x) \;\Leftrightarrow\; f(x_{min})\cdot(-\Delta x) \le M_{f,a}(x_0) - M_{f,a}(x_0+\Delta x) \le f(x_{max})\cdot(-\Delta x)$$

Division dieser Ungleichungskette durch $-\Delta x$ ergibt:

$$f(x_{min}) \le \frac{M_{f,a}(x_0) - M_{f,a}(x_0+\Delta x)}{-\Delta x} \le f(x_{max}) \;\Leftrightarrow$$

$$f(x_{min}) \le \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} \le f(x_{max})$$

Wegen $\Delta x \to 0$ und der Stetigkeit von f ergibt sich mit Argumenten wie im Fall $\Delta x>0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

Also ist f an der Stelle x_0 auch linksseitig differenzierbar. Insgesamt haben wir:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$$

Damit gilt wie behauptet:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{M_{f,a}(x_0+\Delta x) - M_{f,a}(x_0)}{\Delta x} = M_{f,a}'(x_0) = f(x_0)$$

Bei auf einem Intervall [a,b] stetigen Randfunktionen f mit dort nicht negativen Funktionswerten können wir nun das Problem "Bestimme die Maß |M| der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse über dem Intervall [a,b]" lösen, wenn eine Stammfunktion F zu f bekannt ist.

Satz: *(Flächen unter nicht negativen Randfunktionen)*

Ist A eine Fläche unter einer nicht negativen, stetigen Randfunktion f über dem Intervall [a,b], und ist F eine Stammfunktion zu f, dann errechnet man das Maß von A durch

$|A| = F(b) - F(a)$

Bew: Ist $M_{f,a}$ eine Flächenmaßfunktion zu f, dann rechnet man, wie wir weiter oben schon gesehen haben:

$|A| = M_{f,a}(b) - M_{f,a}(a)$

Da aber $M_{f,a}$ aber gleich einer Stammfunktion F zu f ist, kann man auch schreiben:

$|A| = F(b) - F(a)$

Anmerkung:

Welche der unendlich vielen Stammfunktionen man konkret nimmt, ist gleich, denn: Sind F und G zwei Stammfunktionen zu f, dann unterscheiden sie sich, weil f auf einem Intervall definiert ist, nur durch eine Konstante C; also etwa $G(x) = F(x) + C$ für alle $x \in I$. Damit ist:

$G(b) - G(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$

Beisp: *(Flächenberechnung unter einer nicht negativen Randfunktion)*

Berechne das Maß der Fläche A zwischen dem Graph der Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^2 + x$ und der x-Achse im Intervall [2,4].

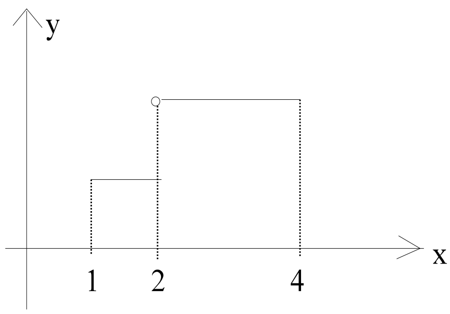
$$f(x) = x^2 + x \qquad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

$$F(4) - F(2) = \frac{1}{3}4^3 + \frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{2}2^2 = \frac{74}{3} = |A|$$

Die Garantie, dass eine Flächenmaßfunktionen zu einer Funktion f gleich einer Stammfunktion zu f ist, gilt nur für stetige Funktionen f. Leider lässt sich nicht jedes Flächenmaß unter einem Funktionsgraphen durch Stammfunktionen berechnen, weil nicht jede Flächenmaßfunktion differenzierbar ist.

Beisp: *(Eine Funktion mit Flächenmaßfunktion ohne Stammfunktion)*

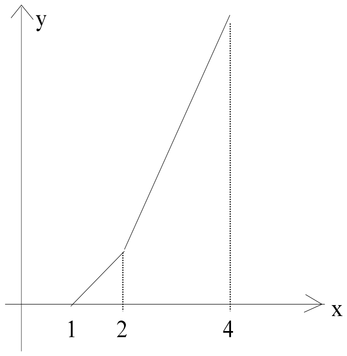
Gegeben ist die Funktion $f: [1,4] \to \mathbb{R}$ mit der Gleichung: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [1,2] \\ 2 & x \in]2,4] \end{cases}$



Eine Flächenmaßfunktion $M_{f,1}$ zu f ist gegeben durch:

$$M_{f,1}(x) = \begin{cases} x-1 & x \in [1,2] \\ 1+2(x-2) & x \in]2,4] \end{cases}$$

Der Graph von $M_{f,1}$ zeigt durch einen "Knick" in seinem Verlauf an, dass diese Flächenmaßfunktion nicht differenzierbar, also auch keine Stammfunktion ist.



8.4.2 Das Integral

Die folgende Definition unterstreicht die Wichtigkeit des im letzten Abschnitt diskutierten Terms F(b) - F(a); man geht nun nicht mehr davon aus, dass f eine Funktion mit nur nicht negativen Werten sei, sondern definiert allgemein:

Def: *(Integral)*

Es sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ *eine Funktion mit einer Stammfunktion F und I=[a,b] ein Intervall, welches in D enthalten ist. Dann heißt die Zahl F(b) - F(a) das Integral von f in den Grenzen a und b. Es sind drei Schreibweisen für das Integral gebräuchlich:*

$$F(b) - F(a) = \Big[\, F(x) \,\Big]_b^a = \int_a^b f(x)\;dx$$

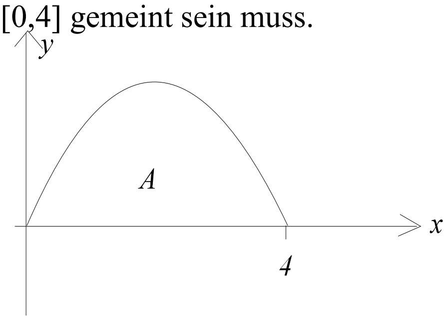
Man liest die rechte Schreibweise "Integral von a nach b über f(x) dx"

Der Gebrauch der Integralschreibweise wird am folgenden Beispiel gezeigt:

Beisp: *(Flächenmaßberechnung unter einer nicht negativen Randfunktion mit Hilfe des Integrals)*

Berechne das Maß der Fläche A, welche vom Graph der Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4x$ und der x-Achse eingeschlossen wird!

Der Graph von f ist eine nach unten offene Parabel mit Nullstellen bei x=0 und x=4. Damit stellt man fest, dass in der Aufgabenstellung das Flächenstück unter dem Funktionsgraphen über dem Intervall [0,4] gemeint sein muss.



$$|A| = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\;dx = \left[-\frac{1}{3}\,x^3 + \frac{4}{2}\,x^2 \right]_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 - 0 = \frac{32}{3}$$