6. Rationale Funktionen

6.1 Ganzrationale Funktionen

6.1.1 Nullstellen und Faktorisierungen von Polynomen

Wie bei anderen Funktionen auch sind bei Polynomfunktionen die Nullstellen charakteristisch.

Def: *(r-fache Nullstelle eines Polynoms)*

Ein Polynom p hat eine r-fache Nullstelle an der Stelle x_0, wenn man es in der Form $p(x) = (x-x_0)^r \cdot q(x)$ schreiben kann. Dabei ist q ein weiteres Polynom mit der Eigenschaft $q(x_0) \neq 0$.

Beisp: *(r-fache Nullstellen eines Polynoms)*

Das Polynom p mit der Gleichung

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x \cdot (x-2)^2$$

hat an der Stelle x=0 eine einfache, an der Stelle x=2 eine doppelte Nullstelle.

Im Beispiel hat man sich erneut (vgl. Kapitel 3) ein Bild des Vorteils von Faktorisierungen von Polynomtermen bei der Bestimmung von Nullstellen machen können. Der folgende Satz, dessen Beweis auf den „Fundamentalsatz der Algebra", einem Ergebnis der Analysis über komplexen Zahlen, zurückgeht und uns deshalb nicht zugänglich ist, zeigt, wie hoch man die Anforderungen an die Faktorisierung von Polynomtermen im Allgemeinen stecken darf.

Satz: *(Möglichkeiten der Umformung von Polynomtermen in Faktoren)*

Jedes Polynom lässt sich als Produkt linearer und nicht weiter faktorisierbarer quadratischer Terme darstellen.

Die Vielfachheit der Nullstellen eines Polynoms weist auch auf die Vielfachheit der Nullstellen der Ableitung des Polynoms hin.

Satz: *(Nullstellen einer ganzrationalen Funktion und ihrer Ableitungen)*

Weist eine ganzrationale Funktion p eine r-fache ($r \in \mathbb{N}$) Nullstelle x_0 auf, dann ist x_0 (r-1)-fache Nullstelle der Ableitungsfunktion p' von p.

Bew: Wenn p eine r-fache Nullstelle x_0 aufweist, dann kann man schreiben $p(x) = (x-x_0)^r \cdot q(x)$, wobei q ein Polynom ist mit $q(x_0) \neq 0$. Die Berechnung von p' ergibt damit:

$$p'(x) = r\cdot(x-x_0)^{r-1}\cdot q(x) + (x-x_0)^r\cdot q'(x) = (x-x_0)^{r-1}\cdot(r\cdot q(x)+(x-x_0)\cdot q'(x)) =$$

$$(x-x_0)^{r-1}\cdot q^*(x)$$

Daraus ergibt sich, dass p' mit x_0 eine (r-1)-fache Nullstelle hat, denn

$$q^*(x_0) = r\cdot q(x_0)+(x_0-x_0)\cdot q'(x) = r\cdot q(x_0) \neq 0$$

weil $r\neq 0$ (denn $r\in\mathbb{N}$) und $q(x_0)\neq 0$ (nach Voraussetzung).

Beisp: *(Nullstellen eines Polynoms und seiner Ableitung)*

Gegeben ist ein Polynom p und seine Ableitung über die Gleichungen:
$p(x) = x^3-4x^2+5x-2 = (x-1)^2\cdot(x-2)$ $\quad$ $p'(x) = 3x^2-8x+5$

Also ist $x_0 = 1$ doppelte und $x_0 = 2$ einfache Nullstelle von p ist; dementsprechend ist $x_0 = 2$ keine Nullstelle und $x_0 = 1$ eine einfache Nullstelle von p'. Davon unberührt bleibt die Tatsache, dass p' eine weitere, von 1 und 2 verschiedene Nullstelle aufweist, denn
$p'(x) = 3x^2-8x+5 = (x-1)\cdot(3x-5)$

Aus dem eben bewiesenen Satz lassen sich einige geometrische Schlussfolgerungen über den Verlauf des Graphen einer Polynomfunktion ziehen.

Satz: *(Die geometrische Interpretation einfacher, doppelter und dreifacher Nullstellen von Polynomen)*

Ist x_0 einfache Nullstelle eines Polynoms p, dann schneidet der Graph von p die x-Achse an der Stelle x_0 .

Ist x_0 doppelte Nullstelle eines Polynoms p, dann berührt der Graph von p die x-Achse an der Stelle x_0 mit einem Hoch- beziehungsweise Tiefpunkt.

Ist x_0 dreifache Nullstelle eines Polynoms p, dann weist der Graph von p an der Stelle x_0 ein Sattelpunkt, also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, auf.

Bew: Nach der Aussage des vorangegangenen Satzes schließen wir:

- Ist x_0 einfache Nullstelle von p, dann ist x_0 nicht Nullstelle von f ´. Also weist der Graph von p an der Stelle x_0 eine nicht waagerechte Tangente auf und schneidet die x-Achse.

- Ist x_0 doppelte Nullstelle von p, dann ist x_0 auch Nullstelle von f ´, aber nicht Nullstelle von f ´´. Also weist der Graph von p an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente und einen Extrempunkt auf.

- Ist x_0 dreifache Nullstelle von p, dann ist x_0 auch Nullstelle von f ´ und von f ´´, aber nicht Nullstelle von f ´´´. Also weist der Graph von p an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente und einen Wendepunkt, also einen Sattelpunkt auf.

6.1.2 Unendliche Grenzwerte von Polynomen

Das Verhalten von Polynomfunktionen bei „unendlich großen“ beziehungsweise „unendlich kleinen“ Werten von x wird erklärt durch folgenden Satz:

Satz: *(Unendliche Grenzwerte von Polynomen)*

Die unendlichen Grenzwerte eines Polynoms p mit der Gleichung

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

werden ausschließlich durch das unendliche Grenzwertverhalten des Polynomsummanden mit der größten Potenz bei x, also durch den Term $a_n\, x^n$, bestimmt. Dabei ergibt sich:

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & a_n > 0 \\ -\infty & a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & a_n > 0 \wedge n \text{ gerade} \\ -\infty & a_n > 0 \wedge n \text{ ungerade} \\ \infty & a_n < 0 \wedge n \text{ ungerade} \\ -\infty & a_n < 0 \wedge n \text{ gerade} \end{cases}$$

Bew: Für $x \neq 0$ gilt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$x^n \cdot \left(a_n \cdot \frac{x^n}{x^n} + a_{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{x^n} + \ldots + a_2 \cdot \frac{x^2}{x^n} + a_1 \cdot \frac{x}{x^n} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n} \right) =$$

$$x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + a_2 \cdot \frac{1}{x^{n-2}} + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n} \right)$$

Da außer a_n alle in der Klammer auftretenden Summanden für $x \to \pm\infty$ den Grenzwert 0 aufweisen, ergibt sich die Behauptung des Satzes.

6.1.3 Exemplarische Untersuchung einer Funktionskurvenschar

Mit dem Begriff **Funktionenschar** bezeichnet man eine Menge von Funktionen mit gemeinsamen Eigenschaften. Wir untersuchen die Funktionsschar f_c mit der Gleichung
$f_c(x) = x^4 + 4\,x^3 + c\,x^2$

In dieser Funktionenschar unterscheiden sich einzelne Funktionen durch den Einsatz verschiedener Werte für c. Die Untersuchung von f_c richtet sich nach folgenden Aufforderungen:

A1 Faktorisiere den Term von f_c! Beobachte anhand der sich daraus unmittelbar ergebenden Nullstelle und der unendlichen Grenzwerte ohne weitere Rechnungen erste gemeinsame Eigenschaften aller Graphen der Schar f_c!

A2 Untersuche die Funktionen f_c auf Nullstellen! Stelle die Lage der Nullstellen im Zusammenhang mit Werten von c dar! Skizziere jeweils mögliche Graphen grob!

A3 Führe eine entsprechende Untersuchung für Extrem- und Wendepunkte durch! Ermittele auch hier für bestimmte Lagen typische Werte von c!

A4 Verarbeite die Informationen aus 2. und 3. zu einer gemeinsamen Übersicht!

A1 Erste Einschätzung, Grenzwerte

$f_c(x) = x^4 + 4x^3 + c\,x^2 = x^2 \cdot (x^2 + 4x + c)$

Man erkennt bei x = 0 eine mindestens doppelte Nullstelle; genauer

Fakt (1) Falls $c \neq 0$, hat f eine doppelte Nullstelle bei x = 0, gleichzeitig also auch einen Hoch- oder Tiefpunkt dort.

Fakt (2) Falls c = 0, findet man eine einfache Nullstelle bei x = - 4, eine dreifache bei x=0. Bei x = 0 liegt dann also auch ein Sattelpunkt vor.

Fakt (3) $\lim\limits_{x\to\infty} f_c(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f_c(x) = \infty$

A2 Nullstellen

$f_c(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 + 4x + c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 + 4x + \mathbf{4} = \mathbf{4} - c \Leftrightarrow x = 0 \lor (x+2)^2 = 4 - c$

Die Wurzel lässt sich nur ziehen, wenn $4 - c \geq 0$, das heißt, wenn $c \leq 4$. Im Einzelnen:

Fakt (4) Falls c > 4, gilt: $f_c(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Fakt (5) Falls c = 4, gilt: $f_c(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -2$

Fakt (6) Falls c < 4, gilt: $f_c(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -2 + \sqrt{4-c} \lor x = -2 - \sqrt{4-c}$

Übersicht zu Grenzwerten und Nullstellen

		c < 0	c = 0	0 < c < 4	c = 4	c > 4
Grenzwert $x\to\infty$		∞	∞	∞	∞	∞
Grenzwert $x\to-\infty$		∞	∞	∞	∞	∞
Nullstellen	Stelle	x = 0 $x = -2+\sqrt{4-c}$ $x = -2-\sqrt{4-c}$	x=0 x = - 4	x = 0 $x = -2+\sqrt{4-c}$ $x = -2-\sqrt{4-c}$	x=0 x=-2	x = 0 keine weiteren
	Vielfachheit	doppelt einfach einfach	dreifach einfach	doppelt einfach einfach	doppelt doppelt	doppelt

A3 Ableitungen, Extrema und Wendepunkte

Die weiteren Untersuchungen lassen sich mithilfe der Ableitungen durchführen:
$f_c'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 2cx = 2x(2x^2 + 6x + c)$
$f_c''(x) = 12x^2 + 24x + 2c$
$f_c''(x) = 24x + 24 = 24(x+1)$

Extrema

Für Punkte mit waagerechter Tangente, lassen sich bereits einige Erkenntnisse aus der Übersicht zu Nullstellen und Grenzwerten ziehen. Diese sind unter den Fakten (1) und (2) bereits notiert. Die genaue Nullstellenuntersuchung der ersten Ableitung ergibt:

$f_c'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 + 6x + c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 3x + \frac{c}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{c}{2} \Leftrightarrow x = 0 \vee \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9-2c}{4}$

Die Wurzel lässt sich nur ziehen, wenn $9 - 2c \geq 0$, das heißt, wenn $c \leq 4{,}5$. Im Einzelnen:

Fakt (7) **Falls c > 4,5**, findet man nur bei $x = 0$ eine waagerechte Tangente.
Die weitere Untersuchung ergibt hier: $f_c''(0) = 2c > 0$; also T (0/0).

Fakt (8) **Falls c = 4,5**, findet man $x = 0$ und bei $x = -\frac{3}{2}$ waagerechte Tangenten.

Die weitere Untersuchung ergibt:

Für $x = 0$: $f_c''(0) = 2c = 9 > 0$; also hat man einen Tiefpunkt T(0/0).

Für $x = -\frac{3}{2}$: Vzw-Unters. $f_{4,5}'$: $- \to -$; kein Vzw.; Sattelpunkt $S\left(-\frac{3}{2} / \frac{27}{16}\right)$

Falls c < 4,5, findet man bei $x = 0$, $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$, $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$

waagerechte Tangenten.

Die folgende Untersuchung der ermittelten Stellen ergibt eine weitere Differenzierung des Bereiches aller c mit $c < 4{,}5$:

a) Die Untersuchung der Stelle x=0 im Fall c < 4,5:

Es gilt: $f_c''(0) = 2c$.

Fakt (9) **Falls 0 < c < 4,5**, ergibt sich der Tiefpunkt T(0/0).

Fakt (10) **Falls c < 0**, findet man den Hochpunkt H(0/0).

Für $c = 0$ ergibt sich nach Fakt (2) der Sattelpunkt S(0/0).

b) *Die Untersuchung der Stelle* $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$ *im Fall c < 4,5:*

Fakt (11) **Falls 0<c< 4,5**, ist $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-2c}}{2} < 0$. Da für 0< c< 4,5 der Tiefpunkt T (0/0) nachgewiesen ist, ergibt sich hier zwingend ein Hochpunkt. EineVorzeichen-wechseluntersuchung von f' bestätigt das Ergebnis.

Fakt (12) **Falls c < 0**, ist $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-2c}}{2} > 0$. Für c< 0 findet man im Ursprung den Hochpunkt H(0/0), also ergibt sich hier ein Tiefpunkt. Eine Vorzeichenwech-seluntersuchung von f' bestätigt das Ergebnis.

Für c = 0 ergibt sich wieder der Sattelpunkt S(0/0) (vergleiche Fakt (2)).

c) *Die Untersuchung der Stelle* $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$ *im Fall c < 4,5:*

Fakt (13) **Falls c < 4,5** ergibt sich an dieser Stelle nach Betrachtung der Lage der übrigen typischen Punkte ein Tiefpunkt. Eine Vorzeichenwechseluntersuchung von f' bestätigt das Ergebnis.

Wendepunkte

Man wählt den Ansatz über die Nullstellen-Untersuchung der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 24x + 2c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{1}{6}c = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = -\frac{1}{6}c + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{6-c}{6}$$

Die Wurzel lässt sich nur ziehen, wenn 6 - c ≥0, wenn also c ≤6. Im Einzelnen findet man:

Fakt (14) **Falls c > 6**, enthält der Graph von f_c keine Wendepunkte.

Fakt (15) **Falls c = 6**, findet man bei x = -1 eine Nullstelle der zweiten Ableitung. Eine Vorzei-chenwechseluntersuchung von

$f_c''(x) = f_6''(x) = 12x^2 + 24x + 12 = 12(x^2 + 2x + 1) = 12(x+1)^2$
in der Umgebung von x = -1 ergibt, dass in P (-1 / 3) kein Wendepunkt vorliegt.

Fakt (16) **Falls c < 6** hat f_c'' zwei verschiedene Nullstellen:

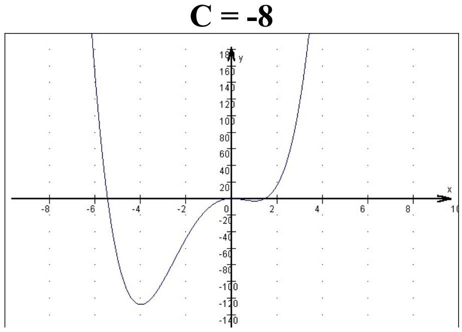
$$f_c''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{\frac{6-c}{6}} \vee x = -1 - \sqrt{\frac{6-c}{6}}$$

An beiden Stellen gilt: $f_c'''(x) \neq 0$; also findet man dort Wendepunkte.

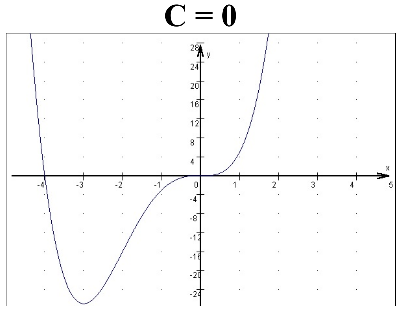
A4 Übersicht zu Grenzwerten, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen der Funktionenschar

		$c < 0$	$c = 0$	$0 < c < 4$	$c = 4$
Grenzwert $x \to \infty$		∞	∞	∞	∞
Grenzwert $x \to -\infty$		∞	∞	∞	∞
Nullstellen von f_c $f_c(x) = 0$	Stellen	$x = 0$ $x = -2+\sqrt{4-c}$ $x = -2-\sqrt{4-c}$	$x=0$ $x = -4$	$x = 0$ $x = -2+\sqrt{4-c}$ $x = -2-\sqrt{4-c}$	$x=0$ $x=-2$
	Vielfachheit	doppelt einfach einfach	dreifach einfach	doppelt einfach einfach	doppelt doppelt
Nullstellen von f_c' $f_c'(x) = 0$	Stellen	$x = 0$ $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$ $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$	$x = 0$ $x = -3$	$x = 0$ $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$ $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$	$x = 0$ $x = -1$ $x = -2$
	Vielfachheit	einfach einfach einfach	doppelt einfach	einfach einfach einfach	einfach einfach einfach
	Art	H (0 / 0) T T	S (0 / 0) T (-3/ -27)	T (0 / 0) H T	T (0 / 0) H (-1 / 1) T (-2 / 0)
Nullstellen von f_c'' $f_c''(x) = 0$	Stelle	$x = -1 + \sqrt{\frac{6-c}{6}}$ $x = -1 - \sqrt{\frac{6-c}{6}}$	$x = 0$ $x = -2$	$x = -1 + \sqrt{\frac{6-c}{6}}$ $x = -1 - \sqrt{\frac{6-c}{6}}$	$x = -0{,}42$ $x = -1{,}58$
	Vielfachheit	einfach einfach	einfach einfach	einfach einfach	einfach einfach
	Art	W W	W (0 / 0) W (-2 / -16)	W W	W (-0,42/1,05) W(-1,58/-0,44)
Exemplarische Zeichnung für		c = -8	c = 0	c = 3	c = 4

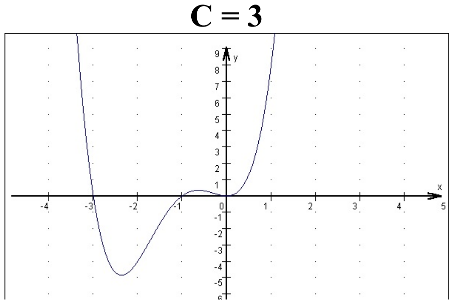
C = -8



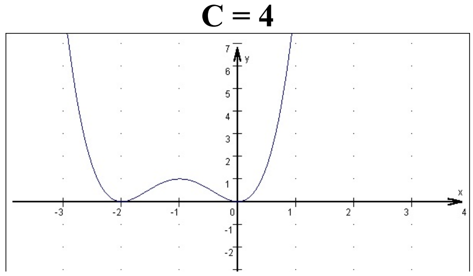
C = 0



C = 3

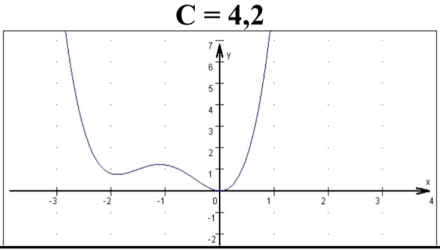


C = 4

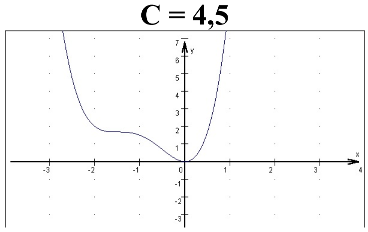


		$4 < c < 4{,}5$	$c = 4{,}5$	$4{,}5 < c < 6$	$c = 6$	$c > 6$
Grenzwert $x \to \infty$		∞	∞	∞	∞	∞
Grenzwert $x \to -\infty$		∞	∞	∞	∞	∞
Nullstellen von f_c $f_c(x) = 0$	Stellen	x = 0 keine weiteren	x = 0 keine weiteren	x = 0 keine weiteren	x = 0 keine weiteren	x = 0 keine weiteren
	Vielfachheit	doppelt	doppelt	doppelt	doppelt	doppelt
Nullstellen von f_c' $f_c'(x) = 0$	Stellen	x = 0 $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$ $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{9-2c}}{2}$	x = 0 x = -1,5	x = 0 keine weiteren	x = 0 keine weiteren	x = 0 keine weiteren
	Vielfachheit	einfach	einfach doppelt	einfach	einfach	einfach
	Art	T (0 / 0) H T	T (0 / 0) S (-1,5 /1,69)	T (0 / 0)	T (0 / 0)	T (0 / 0)
Nullstellen von f_c'' $f_c''(x) = 0$	Stelle	$x = -1 + \sqrt{\frac{6-c}{6}}$ $x = -1 - \sqrt{\frac{6-c}{6}}$	x = -0,5 x = -1,5	$x = -1 + \sqrt{\frac{6-c}{6}}$ $x = -1 - \sqrt{\frac{6-c}{6}}$	x = -1	-
	Vielfachheit	einfach einfach	einfach einfach	einfach einfach	doppelt	-
	Art	W W	W (-0,5 / 0,69) W (-1,5 /1,69)	W W	-	-
Exemplarische Zeichnung für		c = 4,2	c = 4,5	c = 5	c = 6	c = 10

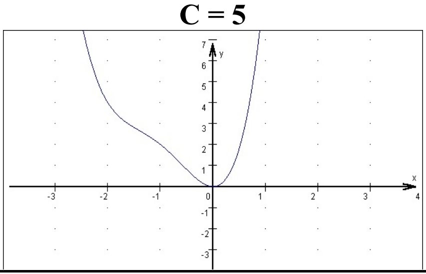
C = 4,2



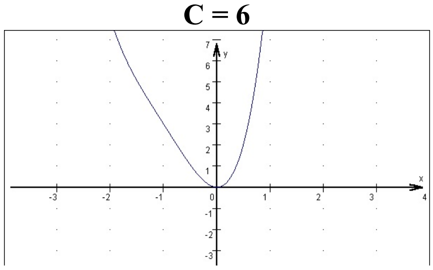
C = 4,5



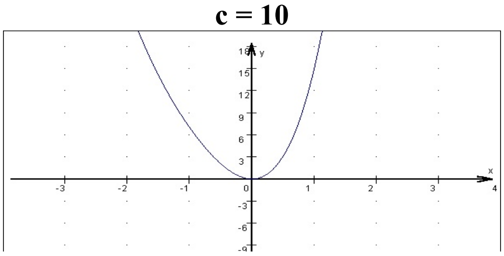
C = 5



C = 6



c = 10



6.2 Terme gebrochenrationaler Funktionen

6.2.1 Echt und unecht gebrochenrationale Funktionen

Def: *(Echt und unecht gebrochenrationale Funktionen)*

Eine gebrochenrationale Funktion heißt echt gebrochenrationale Funktion genau dann, wenn der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist; sie heißt unecht gebrochenrational, falls der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist.

Beisp: *(Echt und unecht gebrochenrationale Funktionen)*

Im obigen Beispiel ist f_1 unecht und f_2 echt gebrochen; f_3 zählt als ganzrationale zu den unecht gebrochenrationalen Funktionen.
Im Allgemeinen: Eine gebrochenrationale Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

ist echt gebrochenrational, falls $n<m$ und unecht gebrochenrational, falls $n \geq m$.

Durch Polynomdivision lässt sich eine unecht gebrochenrationale Funktion in die Summe aus einer ganzrationalen und einer echt gebrochenrationalen Funktion überführen.

Beisp: (Zerlegung einer unecht gebrochenrationalen Funktion)

$$f(x) = \frac{6x^3 - 4x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 7}$$

$$(6x^3 - 4x^2 + 5x - 3) : (x^2 + 2x + 7) = 6x - 16 + \frac{-5x + 109}{x^2 + 2x + 7}$$

$$\begin{array}{l} \underline{6x^3 + 12x^2 + 42x} \\ \quad -16x^2 - 37x - 3 \\ \quad \underline{-16x^2 - 32x - 112} \\ \qquad\qquad -5x + 109 \end{array}$$

6.2.2 Faktorisierung gebrochenrationaler Funktionen

Für die meisten Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit der Kurvendiskussion gebrochenrationalen Funktionen ist es unumgänglich, den Funktionsterm im Zähler und im Nenner zu faktorisieren. Dabei werden die Faktorisierungstechniken für Polynome angewendet.

Beisp: *(Faktorisierung gebrochenrationaler Funktionen)*

Faktorisiere die gebrochenrationale Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 7x + 10}$$

Die Faktorisierung geschieht hier über quadratische Ergänzung in Verbindung mit den binomischen Formeln; man findet:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 7x + 10} = \frac{x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 5}{x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 10} = \frac{(x+2)^2 - 9}{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\frac{(x+2-3)\cdot(x+2+3)}{\left(x + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{(x-1)\cdot(x+5)}{(x+2)\cdot(x+5)}$$

An dieser Stelle liest man den Definitionsbereich der Funktion f ab: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -5\}$. Auf diesem Definitionsbereich, besonders für alle $x \neq -5$, kann man den Funktionsterm kürzen und findet:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-2, -5\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$$

Man merkt sich:

> Bevor aus dem Nennerpolynom einer gebrochenrationalen Funktion Terme gekürzt werden, ist der Definitionsbereich zu bestimmen.

6.2.3 Partialbruchzerlegung

Nicht für jede Aufgabenstellung ist die faktorisierte Form der Gleichung einer gebrochenrationalen Funktion optimal; besonders bei der künftigen Berechnung von Stammfunktionen gebrochenrationaler Funktionen ist es günstiger, den Funktionsterm als eine Summe mehrerer einfacher Terme darzustellen. Ein erster Schritt auf dem Weg dorthin ist die Zerlegung des Funktionsterm in den echt und den unecht gebrochenrationalen Anteil. Den echt gebrochenrationalen Anteil behandelt man weiter mit dem Verfahren der Partialbruchzerlegung. Das folgende Beispiel zeigt in einem einfachen Fall das erforderliche Vorgehen.

Beisp: *(Partialbruchzerlegung einer gebrochenrationalen Funktion)*

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$.

Das Verfahren der Partialbruchzerlegung setzt die Faktorisierung des Nenners voraus

$$f(x) = \frac{x + 3}{(x - 1)\cdot(x + 1)}$$

Durch Partialbruchzerlegung strebt man an, den Funktionsterm von f als Summe von Brüchen zu schreiben, welche jeweils einen Linearfaktoren des Nenners von f als Nenner aufweisen. Der Ansatz lautet hier:

$$\frac{x+3}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit dem Hauptnenner strebt man einen Koeffizientenvergleich zur Ermittlung von A_1 und A_2 an:

$$\frac{x+3}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} \Leftrightarrow x+3 = A_1\cdot(x+1) + A_2\cdot(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x+3 = (A_1 + A_2)\cdot x + A_1 - A_2 \Leftrightarrow A_1 + A_2 = 1 \wedge A_1 - A_2 = 3 \Leftrightarrow A_1 = 2 \wedge A_2 = -1$$

Also ist: $\quad f(x) = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

Der im Beispiel verwendete Ansatz zur Partialbruchzerlegung ist nur günstig, wenn im Nenner der gebrochenrationalen Funktion f, die in Partialbrüche zerlegt werden soll, ausschließlich lineare Faktoren - und diese jeweils nur einmal - auftreten.

Satz: *(Partialbruchzerlegung - einfach auftretende, lineare Faktoren im Nenner)*

Eine echt gebrochenrationale Funktion habe nach Faktorisierung des Nenners folgenden Term:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}$$

Ein passender Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Weitere typische Ansätze zur Partialbruchzerlegung werden in den nächsten Sätzen und Beispielen dargestellt.

Satz: *(Partialbruchzerlegung - mehrfach auftretende, lineare Faktoren im Nenner)*

Eine echt gebrochenrationale Funktion habe nach Faktorisierung des Nenners folgenden Term:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a)^n}$$

Ein passender Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

Beisp: *(Partialbruchzerlegung - mehrfach auftretende, lineare Faktoren im Nenner)*

Verwandele den Term der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3x}{(x-2)^3}$ mit Partialbruchzerlegung in eine Summe!

Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{3x}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3}$$

Diese Gleichung wird mit dem Hauptnenner multipliziert; danach wird ein Koeffizientenvergleich angestrebt.

$$\frac{3x}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} \Leftrightarrow 3x = A_1 \cdot (x-2)^2 + A_2 \cdot (x-2) + A_3 \Leftrightarrow$$

$$3x = A_1 \cdot (x^2 - 4x + 4) + A_2 \cdot (x-2) + A_3 \Leftrightarrow$$

$$3x = A_1 \cdot x^2 + (-4A_1 + A_2) \cdot x + 4A_1 - 2A_2 + A_3 \Leftrightarrow$$

$$A_1 = 0 \wedge -4A_1 + A_2 = 3 \wedge 4A_1 - 2A_2 + A_3 = 0 \Leftrightarrow A_1 = 0 \wedge A_2 = 3 \wedge A_3 = 6$$

Daraus ergibt sich die Partialbruchzerlegung des Terms von f:

$$f(x) = \frac{3x}{(x-2)^3} = \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{6}{(x-2)^3}$$

Satz: *(Partialbruchzerlegung - einfach auftretende, quadratische Faktoren im Nenner)*

Eine echt gebrochenrationale Funktion habe nach Faktorisierung des Nenners folgenden Term:

$$\mathrm{f}(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + a_n x + b_n)}$$

Ein passender Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{\mathrm{p}(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + a_n x + b_n)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + a_1 x + b_1} + \ldots + \frac{A_n x + B_n}{x^2 + a_n x + b_n}$$

Beisp: *(Partialbruchzerlegung - einfach auftretende, quadratische Faktoren im Nenner)*

Verwandele den Term der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 2) \cdot (x^2 + 1)}$ mittels Partialbruchzerlegung in eine Summe!

Der Ansatz ist:

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 2) \cdot (x^2 + 1)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + 2} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2 + 1}$$

Diese Gleichung wird mit dem Hauptnenner multipliziert; ein Koeffizientenvergleich wird angestrebt:

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)\cdot(x^2+1)} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+2} + \frac{A_2 x + B_2}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$x^3+x^2+x+2 = (A_1 x + B_1)\cdot(x^2+1) + (A_2 x + B_2)\cdot(x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$x^3+x^2+x+2 = (A_1 + A_2)\cdot x^3 + (B_1 + B_2)\cdot x^2 + (A_1 + 2A_2)\cdot x + B_1 + 2B_2$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung von A_1 , B_1 , A_2 , B_2:

i) $A_1 + \quad A_2 = 1$

ii) $B_1 + \quad B_2 = 1$

iii) $A_1 + 2\,A_2 = 1$

iv) $B_1 + 2\,B_2 = 2$

Gleichung i) liefert $A_1 = 1 - A_2$; aus Gleichung ii) entnimmt man $B_1 = 1 - B_2$. Damit erhält man für die Gleichungen iii) und iv):

iii) $1 - A_2 + 2\,A_2 = 1 \Leftrightarrow A_2 = 0$

iv) $1 - B_2 + 2\,B_2 = 2 \Leftrightarrow B_2 = 1$

Rückeinsetzen ergibt dann: $A_1 = 1$ und $B_1 = 0$. Die Partialbruchzerlegung für f lautet:

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+2)\cdot(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+1}$$

Satz: *(Partialbruchzerlegung - mehrfach auftretende, quadratische Faktoren im Nenner)*

Eine echt gebrochenrationale Funktion habe nach Faktorisierung des Nenners folgenden Term:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + ax + b)^n}$$

Ein passender Ansatz zur Partialbruchzerlegung lautet:

$$\frac{p(x)}{(x^2 + ax + b)^n} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2 + ax + b} + \ldots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2 + ax + b)^n}$$

Beisp: *(Partialbruchzerlegung - mehrfach auftretende, quadratische Faktoren im Nenner)*

Verwandele den Term der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$ mittels Partialbruchzerlegung in eine Summe!

Der Ansatz lautet:

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+2} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+2)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2+2)^3}$$

Man multipliziert mit dem Hauptnenner und sortiert - mit dem Ziel eines Koeffizientenvergleichs - nach Potenzen von x.

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{A_1 x + B_1}{x^2+2} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2+2)^2} + \frac{A_3 x + B_3}{(x^2+2)^3} \Leftrightarrow$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 =$$

$$(A_1 x + B_1)\cdot(x^2+2)^2 + (A_2 x + B_2)\cdot(x^2+2) + A_3 x + B_3 \Leftrightarrow$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 =$$

$$(A_1 x + B_1)\cdot(x^4 + 4x^2 + 4) + (A_2 x + B_2)\cdot(x^2+2) + A_3 x + B_3 \Leftrightarrow$$

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 =$$

$$A_1 x^5 + B_1 x^4 + (4A_1 + A_2)\cdot x^3 + (4B_1 + B_2)\cdot x^2 + (4A_1 + 2A_2 + A_3)\cdot x + 4B_1 + 2B_2 + B_3$$

Der Koeffizientenvergleich führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rlcr}
i) & A_1 & = & 1 \\
ii) & B_1 & = & -1 \\
iii) & 4A_1 + A_2 & = & 4 \\
iv) & 4B_1 + B_2 & = & -4 \\
v) & 4A_1 + 2A_2 + A_3 & = & 8 \\
vi) & 4B_1 + 2B_2 + B_3 & = & -4
\end{array}$$

Setzt man die Ergebnisse aus den Gleichungen i) und ii) in die übrigen ein, ergibt sich:

$$\begin{array}{rlcr}
iii) & 4 + A_2 & = & 4 \\
iv) & -4 + B_2 & = & -4 \\
v) & 4 + 2A_2 + A_3 & = & 8 \\
vi) & -4 + 2B_2 + B_3 & = & -4
\end{array}$$

Die Gleichungen iii) und iv) liefern $A_2 = B_2 = 0$. Dadurch werden die Gleichungen v) und vi) zu:

$$\begin{array}{rlcr}
v) & 4 + A_3 & = & 8 \\
vi) & -4 + B_3 & = & -4
\end{array}$$

Also $A_3 = 4$, $B_3 = 0$. Die Partialbruchzerlegung zu f lautet also:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{x-1}{x^2+2} + \frac{4x}{(x^2+2)^3}$$

Fasst man die behandelten speziellen Fälle der Partialbruchzerlegung zusammen, ergibt sich der allgemeine Satz über die Partialbruchzerlegung:

Satz: *(Partialbruchzerlegung)*

Eine echt gebrochenrationale Funktion habe nach völliger Faktorisierung des Nennerpolynoms im Nenner k nicht weiter reduzierbare quadratische Faktoren mit Vielfachheiten $n_1, \dots, n_k$ und l Linearfaktoren mit Vielfachheiten $m_1, \dots, m_l$ und damit folgenden Term:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{n_1} \cdot \dots (x^2 + a_k x + b_k)^{n_k} \cdot (x - c_1)^{m_1} \dots (x - c_l)^{m_l}}$$

Dann ist eine Partialbruchzerlegung als Summe so anzusetzen, dass zu jedem quadratischen Faktor der Form $(x^2 + a x + b)^n$ n Brüche

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + a x + b} + \dots + \frac{A_n x + B_n}{(x^2 + a x + b)^n}$$

und für jeden linearen Faktor der Form $(x - c)^m$ m Brüche

$$\frac{C_1}{x - c} + \dots + \frac{C_m}{(x - c)^m}$$

als Summanden eingehen.

Beisp: *(Partialbruchzerlegung)*

Verwandele den Term der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{3x + 5}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)}$ mittels Partialbruchzerlegung in eine Summe!

Ansatz: $$\frac{3x + 5}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Man multipliziert mit dem Hauptnenner, um einen Koeffizientenvergleich zu erreichen:

$$\frac{3x + 5}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$3x + 5 = A \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) + B \cdot (x + 1) + C \cdot (x - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$3x + 5 = A \cdot (x^2 - 1) + B \cdot (x + 1) + C \cdot (x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow$$

$$3x + 5 = (A + C) \cdot x^2 + (B - 2C) \cdot x - A + B + C$$

Der Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem:

i) $0 = A + C$
ii) $3 = B - 2C$
iii) $5 = -A + B + C$

Gleichung i) ergibt $C = -A$; damit findet man in ii) und iii):

ii) $3 = B + 2A$
iii) $5 = B - 2A$

Aus ii) entnimmt man $B = 3 - 2A$; damit wird Gleichung iii) zu:

iii) 5 = 3 - 4A

Damit findet man A = $-\frac{1}{2}$, B = 4, C = $\frac{1}{2}$. Die Partialbruchzerlegung von f ist damit:

$$\frac{3x+5}{(x-1)^2\cdot(x+1)} = \frac{-1}{2\cdot(x-1)} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\cdot(x+1)}$$

6.3 Unendliche Grenzwerte und Asymptoten gebrochenrationaler Funktionen

Wir ermitteln zunächst die unendlichen Grenzwerte einer echt gebrochenrationalen Funktion.

Satz: *(unendliche Grenzwerte einer echt gebrochenrationalen Funktion)*

Ist f eine echt gebrochenrationale Funktion, dann gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Bew: Falls f eine echt gebrochenrationale Funktion, dann schreibt man deren Term so:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Man klammert im Zähler und im Nenner jeweils die höchste Potenz von x aus:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$\frac{x^n\cdot\left(a_n\cdot\frac{x^n}{x^n} + a_{n-1}\cdot\frac{x^{n-1}}{x^n} + \ldots + a_1\cdot\frac{x}{x^n} + a_0\cdot\frac{1}{x^n}\right)}{x^m\cdot\left(b_m\cdot\frac{x^m}{x^m} + b_{m-1}\cdot\frac{x^{m-1}}{x^m} + \ldots + b_1\cdot\frac{x}{x^m} + b_0\cdot\frac{1}{x^m}\right)} =$$

$$\frac{a_n + a_{n-1}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + a_1\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\cdot\frac{1}{x^n}}{x^{m-n}\cdot\left(b_m + b_{m-1}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + b_1\cdot\frac{1}{x^{m-1}} + b_0\cdot\frac{1}{x^m}\right)}$$

Im Zähler des letzten Bruchs weist für $x\to\pm\infty$ nur der Summand a_n einen von Null verschiedenen Grenzwert auf, in der Klammer im Nenner nur der Summand b_m. Da der Faktor x^{n-m} für $x\to\pm\infty$ entweder den Grenzwert ∞ oder $-\infty$ annimmt (n<m !), ergibt sich der Grenzwert 0 für f(x).

Im folgenden Beispiel ist die Idee des ausgeführten Beweises anhand eines konkreten Beispiels umgesetzt:

Beisp: *(unendliche Grenzwerte einer echt gebrochenrationalen Funktion)*

Gegeben sei die echt gebrochenrationale Funktion f mit: $f(x) = \frac{-x^2+10x}{x^3+2x+7}$

Für diese Funktion ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, denn

Für $x \neq 0$ gilt: $$f(x) = \frac{-x^2+10x}{x^3+2x+7} = \frac{(-x^2+10x)\cdot\frac{1}{x^3}}{(x^3+2x+7)\cdot\frac{1}{x^3}} = \frac{-\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}$$

Die Ermittlung der unendlichen Grenzwerte echt gebrochenrationaler Funktionen führt unmittelbar zur Analyse des Grenzverhaltens aller gebrochenrationaler Funktionen.

Satz: *(Unendliche Grenzwerte gebrochenrationaler Funktionen)*

Die unendlichen Grenzwerte gebrochenrationaler Funktionen sind gleich den unendlichen Grenzwerten ihres ganzrationale Anteils.

Bew: Jede gebrochenrationale Funktion kann in die Summe aus einer ganzrationalen und einer echt gebrochenrationalen Funktion zerlegt werden. Da der echt gebrochenrationale Anteil unendliche Grenzwerte 0 aufweist, bestimmt nur der ganzrationale Summand das unendliche Grenzverhalten der gebrochenrationalen Funktion.

Aufgrund dieser Eigenschaft gibt man dem ganzrationalen Anteil eine eigene Bezeichnung.

Def: *(Asymptote einer gebrochenrationalen Funktion)*

Der ganzrationale Anteil einer gebrochenrationalen Funktion heißt ihre Asymptotenfunktion f_A.

Die Rechenpraxis zeigt, dass es in der Regel einfach ist, die Grenzwerte der Asymptotenfunktion zu bestimmen; diese Situation nützt man aus:

Satz: *(Unendliche Grenzwerte gebrochenrationaler Funktionen)*

Die unendlichen Grenzwerte einer gebrochenrationalen Funktion f sind gleich den Grenzwerten der zugehörigen Asymptotenfunktion f_A.

Beisp: *(Asymptote und Grenzwert einer gebrochenrationalen Funktion)*

Weiter oben haben wir bereits eine Funktion f in einen ganzrationalen und einen echt gebrochenrationalen Anteil zerlegt und damit den Term von f_A bestimmt.

$$f(x) = \frac{6x^3-4x^2+5x-3}{x^2+2x+7} = 6x-16+\frac{-5x+109}{x^2+2x+7} \Rightarrow f_A(x) = 6x-16$$

Daraus ergeben sich die Grenzwerte der Funktion f im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f_A(x) = \lim_{x\to\infty} 6x-16 = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f_A(x) = \lim_{x\to-\infty} 6x-16 = -\infty$$

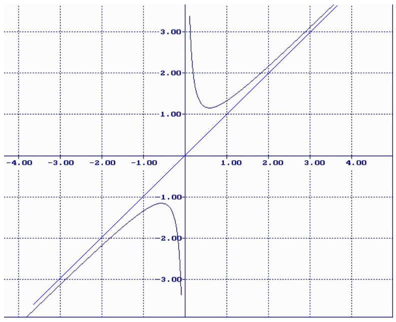
Die Gleichheit der unendlichen Grenzwerte einer gebrochenrationalen Funktion f und ihrer zugehörigen Asymptotenfunktion f_A zeigt sich im Schaubild durch eine Annäherung der zugehörigen Graphen für große und kleine x.

Beisp: *(Graphen einer gebrochenrationalen Funktion und ihrer Asymptote)*

Gegeben sind die Funktion f und ihre Asymptote f_A durch ihre Funktionsterme:

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{3x} = x + \frac{1}{3x} \qquad f_A(x) = x$$

Die zeichnerische Darstellung verdeutlicht das Annäherungsverhalten des Graphen von f an den Graph von f_A.



6.4 Pole und hebbare Unstetigkeiten bei gebrochenrationalen Funktionen

Ein offensichtliches Problem bei der Behandlung gebrochenrationaler Funktionen ist, dass der Definitionsbereich in der Regel eingeschränkt ist.

Satz: *(Definitionslücken gebrochenrationaler Funktionen)*

Gebrochenrationale Funktionen sind nicht definiert an den Stellen, wo das Nennerpolynom den Wert 0 hat, also an den Nullstellen des Nennerpolynoms; überall sonst sind sie definiert.

Das nun folgende Beispiel zeigt, wie man Definitionslücken und ihre Besonderheiten auffindet.

Beisp: *(Definitionslücken einer gebrochenrationalen Funktion)*

Gegeben ist eine Funktion f durch ihre Gleichung:

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-5x-30}{x^2-2x-3} = \frac{x^3+2x^2-5x-30}{(x-3)\cdot(x+1)}$$

Die Definitionslücken von f liegen offensichtlich an den Stellen x = 3 und x = -1 , weil das Nennerpolynom die Nullstellen x=3 und x=-1 hat; also ist $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3,-1\}$. Durch Einsetzen stellt man fest, dass das Zählerpolynom an der Stelle x=3 ebenfalls eine Nullstelle besitzt. Damit kann man auch das Zählerpolynom mithilfe einer Polynomdivision faktorisieren, und es ergibt sich:

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-5x-30}{x^2-2x-3} = \frac{(x-3)\cdot(x^2+5x+10)}{(x-3)\cdot(x+1)}$$

Eine weitere Zerlegung des Zählerpolynoms in Faktoren gelingt nicht, weil der quadratische Term für alle $x \in \mathbb{R}$ größer als 0 ist.

Nehmen wir an, dass der Term x-3 nicht 0 sei, dann stellen wir nach Kürzen fest, dass f genau dann, wenn $x-3 \neq 0$, gleich der Funktion g mit folgender Gleichung ist:

$$g(x) = \frac{x^2+5x+10}{x+1}$$

Allerdings weist g im Unterschied zu f keine Definitionslücke an der Stelle x=3 auf. Da aber g(x) = f(x) für alle $x \neq 3$, besitzt f an der Stelle x=3 einen Grenzwert, obwohl 3 nicht im Definitionsbereich von f liegt:

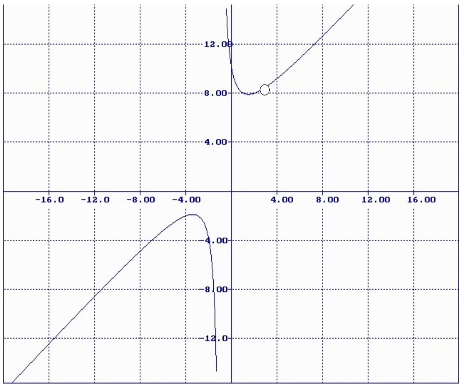
$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} g(x) = g(3) = 8{,}5$$

Der Graph von f zeigt im Vergleich zum Graph von g als einzigen Unterschied ein „Loch" an der Stelle x=3; dieses Loch wäre leicht zu beseitigen, indem man an der Stelle x=3 den Funktionswert definiert, also festlegt f(3) = 8,5. Nach dieser Beseitigung der Definitionslücke an der Stelle x=3 würden sich die entstandene Funktionen f^* und g nicht mehr unterscheiden, also:

$$f^*(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{x^3+2x^2-5x-30}{x^2-2x-3} & x \neq 3 \\ 8{,}5 & x=3 \end{array} \right\} = \frac{x^2+5x+10}{x+1} = g(x)$$

An der Stelle x=-1 ist ein vergleichbares Verfahren der Ergänzung von Lücken im Definitionsbereich nicht möglich, weil zum einen -1 nicht zugleich Nullstelle von Zähler- und Nennerpolynom ist und zweitens an der Stelle -1 unendliche Grenzwerte auftreten. Die aufgetretenen Diskussionspunkte vollzieht man in der Zeichnung nach.

Entsprechend den Ergebnissen des Beispiels benennt man:



Def: *(Stetige Behebbarkeit von Definitionslücken)*

Eine Definitionslücke x_0 heißt stetig behebbare Definitionslücke der Funktion f, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *existiert.*

Definitionslücken x_0, an denen ein Grenzwert nicht existiert, bezeichnet man durch:

Def: *(Polstelle)*

Eine Definitionslücke x_0 heißt r-fache Polstelle der gebrochenrationalen Funktion f, wenn x_0 r-fache Nullstelle des Nennerpolynoms und zugleich nicht Nullstelle des Zählerpolynoms ist. f besitzt dann auf ihrem Definitionsbereich eine Darstellung der folgenden Form:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_0)^r \cdot h(x)}$$

Dabei sind g und h Polynome, für die gelten muss $g(x_0) \neq 0$ und $h(x_0) \neq 0$.

Um das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion an einer Polstelle zu klären, ist es nötig, die einseitigen Grenzwerte an dieser Stelle näher zu untersuchen. Aus dem angegebenen Term einer Funktion f mit r-facher Polstelle erkennt man in diesem Zusammenhang direkt:

Satz: *(Grenzwerte gebrochenrationaler Funktionen an Polstellen)*

Wenn eine gebrochenrationale Funktion f an einer Stelle x_0 einen Pol besitzt, dann erhält man an dieser Stelle einseitige Grenzwerte mit Werten ∞ oder $-\infty$.

Wann als uneigentlicher Grenzwert an einer Polstelle ∞ und wann $-\infty$ zu erwarten ist, kann man gut abschätzen, wenn man die entsprechende gebrochenrationale Funktion f in der Darstellung

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_0)^r \cdot h(x)} \quad (g(x_0) \neq 0,\ h(x_0) \neq 0)$$

betrachtet.

Beisp: *(Grenzwerte an Polstellen)*

Wir betrachten zwei gebrochenrationale Funktionen f_1 und f_2, die beide eine Polstelle an der Stelle $x_0=1$ aufweisen; ihre Gleichungen sind:

$$f_1(x) = \frac{x+3}{(x-1)\cdot(x+2)} \qquad f_2(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2\cdot(x+2)}$$

Beide Funktionsgleichungen liegen in der gewünschten Darstellung vor. Zur leichteren Vergleichbarkeit der jeweiligen Grenzwerte an der Polstelle $x_0=1$ formen wir die Funktionsgleichungen ein wenig um:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x+3}{x+2} \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\frac{x+3}{x+2}$$

Das unterschiedliche Verhalten der beiden Funktionen an ihrer Polstelle wird deutlich, wenn man die Terme x-1 beziehungsweise $(x-1)^2$ betrachtet: Der Term x-1 wechselt in der Umgebung von $x_0=1$ kommend von x<1 übergehend zu x>1das Vorzeichen (- → +), wogegen $(x-1)^2$ keinen Vorzeichenwechsel aufweist (+ → +). Also:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = \infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Damit ergeben sich die einseitigen Grenzwerte an der Polstelle:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_1(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_1(x) = \infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_2(x) = \infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_2(x) = \infty$$

Verallgemeinert man das Beispiel, dann erhält man eine brauchbare Regel, um das Grenzwertverhalten an Polstellen beurteilen zu können:

Satz: *(Grenzwerte an Polstellen)*

f sei eine gebrochenrationale Funktion mit Polstelle x_0,, also

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_0)^r \cdot h(x)} \qquad (g(x0) \neq 0,\ h(x0) \neq 0)$$

Ist r eine gerade Zahl, dann liegt links und rechts der Polstelle der gleiche einseitige Grenzwert vor, und man rechnet:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \begin{cases} \infty & \dfrac{g(x_0)}{h(x_0)} > 0 \\ -\infty & \dfrac{g(x_0)}{h(x_0)} < 0 \end{cases}$$

Ist r ungerade, wechselt das Vorzeichen der einseitigen uneigentlichen Grenzwerte:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \begin{cases} -\infty & \dfrac{g(x_0)}{h(x_0)} > 0 \\ \infty & \dfrac{g(x_0)}{h(x_0)} < 0 \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \begin{cases} \infty & \dfrac{g(x_0)}{h(x_0)} > 0 \\ -\infty & \dfrac{g(x_0)}{h(x_0)} < 0 \end{cases}$$

Entsprechend den Ergebnissen des Satzes definiert man:

Def: *(Polstellen mit/ohne Vorzeichenwechsel)*

Besitzt eine gebrochenrationale Funktion eine r-fache Polstelle x_0 und ist r eine gerade Zahl, dann heißt x_0 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel; ist r ungerade, so spricht man von einer Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

6.5 Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen

Die Berechnung von Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen lässt sich unmittelbar auf die Berechnung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen zurückführen; denn eine gebrochenrationale Funktion f hat genau dann Nullstellen, wenn das Zählerpolynom Nullstellen innerhalb des Definitionsbereiches von f aufweist.

Def: *(r-fache Nullstelle einer gebrochenrationalen Funktion)*

Eine gebrochenrationale Funktion f hat eine r-fache Nullstelle an der Stelle x_0, wenn das zugehörige Zählerpolynom an der Stelle x_0 eine r-fache Nullstelle und das Nennerpolynom bei x_0 keine Nullstelle aufweist. In Formeln:

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^r \cdot p(x)}{q(x)} \qquad \text{mit } q(x_0) \neq 0 \text{ und } p(x_0) \neq 0.$$

Beisp: *(r-fache Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen)*

Die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x+3} = \frac{x \cdot (x^2 - 4x + 4)}{x+3} = \frac{x \cdot (x-2)^2}{x+3}$$

hat an der Stelle x=0 eine einfache, an der Stelle x=2 eine doppelte Nullstelle.

Aus der Existenz einer r-fachen Nullstelle x_0 einer gebrochenrationalen Funktion f kann man, ebenso wie bei ganzrationalen Funktionen, schließen, ob x_0 auch Nullstelle der Ableitung f' dieser Funktion ist:

Satz: *(Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion und ihrer Ableitungen)*

Weist eine gebrochenrationale Funktion f eine r-fache ($r \in \mathbb{N}$) Nullstelle x_0 auf, dann ist x_0 (r-1)-fache Nullstelle der Ableitungsfunktion p' von p.

Bew: Eine gebrochenrationale Funktion mit als r-facher Nullstelle x_0, lässt sich unter Zuhilfenahme zweier Polynomen p und q mit $p(x_0) \neq 0$, $q(x_0) \neq 0$ schreiben als:

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^r \cdot p(x)}{q(x)} = (x-x_0)^r \cdot \frac{p(x)}{q(x)}$$

Für die Ableitung von f ergibt sich dann:

$$f'(x) = r \cdot (x-x_0)^{r-1} \cdot \frac{p(x)}{q(x)} + (x-x_0)^r \cdot \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{q^2(x)} =$$

$$(x-x_0)^{r-1} \cdot \left(\frac{r \cdot p(x)}{q(x)} + (x-x_0) \cdot \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{q^2(x)} \right)$$

Da r>0 und $p(x_0) \neq 0$, ist die rechte Klammer ungleich Null, also ist x_0 (r-1)-fache Nullstelle von f ´.

Beisp: *(Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion und ihrer Ableitung)*

Gegeben ist eine Funktion f und ihre Ableitung mit den Gleichungen:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x-3} = \frac{(x-1)^2 \cdot (x-2)}{x-3}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 8x + 5) \cdot (x-3) - (x^3 - 4x^2 + 5x - 2)}{(x-3)^2} = \frac{(x-1) \cdot (3x-5) \cdot (x-3) - (x-1)^2 \cdot (x-2)}{(x-3)^2} =$$

$$\frac{(x-1) \cdot \left((3x-5) \cdot (x-3) - (x-1) \cdot (x-2) \right)}{(x-3)^2} = \frac{(x-1) \cdot \left(2x^2 - 11x + 13 \right)}{(x-3)^2}$$

Man erkennt, dass x_0=1 doppelte und x_0=2 einfache Nullstelle von f ist; dementsprechend ist x_0 =2 keine Nullstelle und x_0=1 eine einfache Nullstelle von p'. Davon unberührt bleibt die Tatsache, dass p' eine weitere, von 1 und 2 verschiedene Nullstelle aufweist, deren Ausrechnung hier unterbleibt.

Aus dem eben bewiesenen Satz lassen sich - wie bei Polynomfunktionen auch - geometrische Schlussfolgerungen über den Verlauf des Graphen einer gebrochenrationalen Funktion ziehen.

Satz: *(Die geometrische Interpretation einfacher, doppelter und dreifacher Nullstellen von gebrochenrationalen Funktionen)*

Ist x_0 einfache Nullstelle eines einer gebrochenrationalen Funktion f, dann schneidet der Graph von f die x-Achse an der Stelle x_0 .

Ist x_0 doppelte Nullstelle einer gebrochenrationalen Funktion f, dann berührt der Graph von f die x-Achse an der Stelle x_0 mit einem Hoch- beziehungsweise Tiefpunkt.

Ist x_0 dreifache Nullstelle einer gebrochenrationalen Funktion f , dann weist der Graph von f an der Stelle x_0 ein Sattelpunkt, also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, auf.

Bew: Der Beweis entspricht wörtlich dem Beweis des entsprechenden Satzes zu Polynomfunktionen.

6.6 Das Schema der Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen behandelt man rechnerisch vollständig nach folgendem Schema:

1	Faktorisieren des Zählers und des Nenners
2	Definitionsbereich D_f
3	Kürzen des Zählers und Nenners
4	Polstellen und hebbare Unstetigkeiten
5	Einfache Symmetrien
6	Trennen in einen echt und einen unecht gebrochenen Bestandteil
7	Feststellen der Asymptote f_A ; Berechnung gemeinsamer Punkte der Graphen von f_A und f
8	Grenzwerte im Unendlichen und an den Definitionslücken
9	Ableitungen jeweils mit Faktorisierung
10	Nullstellen
11	Extrema
12	Monotonieintervalle
13	Wendepunkte
14	Krümmungsintervalle
15	Graph der Funktion