5. Differentialgeometrie von Funktionskurven

5.1 Differentialgeometrie in Zusammenhang mit Geraden

Parallelität und Gleichheit von Geraden in der Koordinatenebene

Satz: *(Parallelität und Gleichheit zweier Geraden in der Koordinatenebene)*

Zwei Geraden g_1 und g_2 in der Koordinatenebene sind zueinander parallel, wenn

a) beide parallel zur y-Achse verlaufen

In diesem Fall sind g_1 und g_2 durch folgende Gleichungen beschreibbar:
g_1: $x = a$ g_2: $x = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$
Ist a = b sind die beiden Geraden nicht nur parallel, sondern sogar gleich.

b) beide nicht parallel zur y-Achse verlaufen und ihre Steigungen gleich sind.

In diesem Fall sind g_1 und g_2 in Hauptform beschreibbar:
g_1: $y = m_1 x + n_1$ g_2: $y = m_2 x + n_2$ $(m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{R})$
und $m_1 = m_2$; ist außerdem $n_1 = n_2$, dann sind die beiden Geraden gleich.

Beisp: *(Parallelität und Gleichheit zweier Geraden in der Koordinatenbene)*

Gegeben sind fünf Geraden durch folgende Beschreibungen:
- g_1 hat die Steigung 2 und beinhaltet den Punkt P(2/4).
- g_2 schneidet die x-Achse an der Stelle x = -2, die y-Achse an der Stelle y = 4.
- g_3 ist gegeben durch die Gleichung 2 x + 4 y = 6.
- g_4 schneidet die x-Achse senkrecht an der Stelle x = 4.
- g_5 ist Verbindungsgerade der Punkte Q(-1/2) und R(-1/8).

Eine Gleichung von g_1 ergibt sich in Punkt-Steigungsform; g_2 lässt sich in Zwei-Punkte-Form beschreiben, weil die beiden Punkte S(-2/0) und T(0/4) auf g_2 liegen; g_3 ist in Form einer allgemeinen Geradengleichung festgelegt; g_4 ist eine Parallele zu y-Achse; g_5 ist eine Parallele zur y-Achse, weil die Punkte Q und R die gleiche x-Koordinate aufweisen. Im einzelnen:

$$g_1\colon y - 4 = 2 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 6 + 4 \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

$$g_2\colon y - 0 = \frac{4 - 0}{0 - (-2)} \cdot (x - (-2)) \Leftrightarrow 2x + 4$$

$$g_3\colon 2x + 4y = 6 \Leftrightarrow 4y = -2x + 6 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$g_4\colon x = 4 \qquad g_5\colon x = -1$$

Man liest weiter ab: g_1 und g_2 sind zueinander parallel, weil sie beide die Steigung m = 2 aufweisen;

sie sind nicht gleich, weil ihre y-Achsenabschnitte ungleich sind. g_4 und g_5 bilden ein Paar paralleler Geraden, weil beide zur y-Achse parallel sind; g_4 und g_5 sind nicht gleich, weil sie an verschiedenen Stellen die x-Achse kreuzen. g_3 ist zu keiner der vier anderen Geraden parallel, weil sie weder parallel zur y-Achse verläuft, noch die Steigung m = 2 aufweist.

Der Schnittpunkt zweier Geraden

Zwei nichtparallele Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Zwei Geraden, die keinen Schnittpunkt aufweisen, sind parallel.

Das folgende Beispiel illustriert Rechenverfahren zur Bestimmung von Geradenschnittpunkten.

Beisp: *(Schnittpunkte von Geraden)*

Gegeben sind vier Geraden:
g_1: y = 5 g_2: x = 3 g_3: y = 2x + 1 g_4: 2x + 3y = 6

Berechne ihre Schnittpunkte!

$S_1 = g_1 \cap g_2$: Man liest ab: x = 3, y= 5 $\Rightarrow S_1(3/5)$

$S_2 = g_1 \cap g_3$: Setze y = 5 in g_3 ein: $5 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S_2(2/5)$

$S_3 = g_1 \cap g_4$: Setze y = 5 in g_4 ein: $2x + 3\cdot 5 = 6 \Leftrightarrow x = -4{,}5 \Rightarrow S_3(-4{,}5/5)$

$S_4 = g_2 \cap g_3$: Setze x = 3 in g_3 ein: $y = 2\cdot 3 + 1 \Leftrightarrow y = 7 \Rightarrow S_4(3/7)$

$S_5 = g_2 \cap g_4$: Setze x = 3 in g_4 ein: $2\cdot 3 + 3y = 6 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow S_5(3/0)$

$S_6 = g_3 \cap g_4$: Setze y = 2x + 1 in g_4 ein: $2x + 3 \cdot (2x+1) = 6 \Leftrightarrow 8x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{3}{8}$

Setze $x = \frac{3}{8}$ in g_3 ein: $y = 2 \cdot \frac{3}{8} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{7}{4} \Rightarrow S_6\left(\frac{3}{8} \,/\, \frac{7}{4}\right)$

Steigungswinkel von Geraden

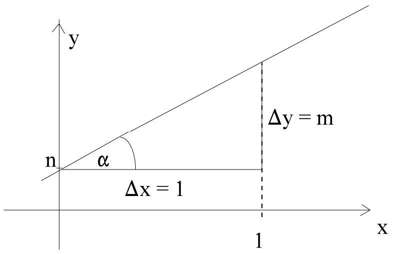
Def: *(Steigungswinkel von Geraden)*

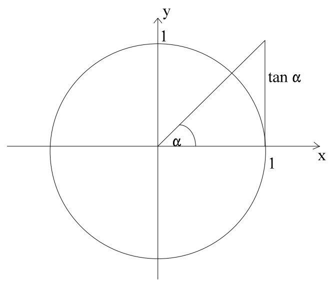
In einem Steigungsdreick zu einer Gerade g mit der Gleichung g: y= m x + n heißt derjenige Innenwinkel, welcher durch g und die zur x-Achse parallele Seite des Steigungsdreiecks eingeschlossen ist, Steigungswinkel α der Geraden g.

Bei einer zur y-Achse parallelen Gerade h mit h: x=a beträgt der Steigungswinkel 90˚.

Bem: Bei der Ermittlung des Steigungswinkels α einer Geraden, lässt man im Falle einer Geraden mit negativer Steigung auch negative Winkel zu. Es gilt also: $-90^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Die linke der beiden folgenden Zeichnungen veranschaulicht bei einer in Hauptform gegebenen Geraden g: $y = mx + n$ folgende Größen: Steigung (m), y-Achsenabschnitt (n) und Steigungswinkel (α). Wir vergleichen die linke Zeichnung mit derjenigen rechts, welche am Einheitskreis die trigonometrische Größe tan (α) zu einem Winkel α verdeutlicht.





Aus dem Vergleich der Zeichnungen erkennt man folgenden rechnerischen Zusammenhang:

Satz: *(Zusammenhang zwischen Steigung und Steigungswinkel einer Gerade)*

Die Steigung m einer in Hauptform gegebenen Gerade g: $y = mx + n$ und ihr Steigungswinkel α hängen über die Gleichung $m = \tan(\alpha)$ voneinander ab.

Beisp: *(Steigungswinkel)*

Gib die Gleichung der Gerade g mit dem Steigungswinkel $\alpha = 30^\circ$ und dem y-Achsenabschnitt 1 an!

Wir berechnen die Steigung m aus dem Steigungswinkel und stellen die Geradengleichung in Hauptform auf:

$$m \quad \tan(30) \quad \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow g\colon y \quad \frac{1}{3}\sqrt{3}\,x \quad 1$$

Orthogonalität (senkrechte Lage) von Geraden

Def: *(Orthogonalität zweier Geraden)*

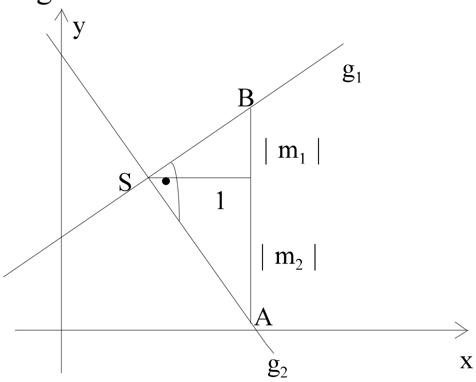
Zwei Geraden, die zueinander senkrecht liegen, heißen orthogonal.

Die Orthogonalität zweier Geraden lässt sich durch folgendes rechnerische Kriterium erkennen:

Satz: *(Orthogonalität zweier Geraden)*

Zwei Geraden g_1, g_2 mit den Gleichungen $g_1\!: y = m_1 x + b_1$ $\quad g_2\!: y = m_2 x + b_2$ sind zueinander orthogonal, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$

Bew: Wir zeichnen die beiden orthogonalen Geraden in ein Koordinatensystem und identifizieren dabei die Beträge $|m_1|$ und $|m_2|$ ihrer Steigungen mit Streckenlängen an einem sich ergebenden rechtwinkligen Dreieck.



Wir übertragen den Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke (kurz: $h^2 = p \cdot q$) auf diese Situation und erhalten im Dreieck SAB: $|m_1| \cdot |m_2| = 1$

Wir stellen nun noch anschaulich fest, dass die Steigungen zweier zueinander senkrechter Geraden entgegengesetztes Vorzeichen aufweisen müssen; mit den Bezeichnungen der Zeichnung ergibt sich also $|m_1| = m_1$ und $|m_2| = -m_2$. Damit erhält man:

$$|m_1| \cdot |m_2| = 1 \Leftrightarrow m_1 \cdot (-m_2) = 1 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Beisp: *(Orthogonale Geraden)*

Prüfe, ob die drei Punkte P(1/2), Q(4/8) und R(3/1) ein rechtwinkliges Dreieck bilden!

Wir bilden drei Geraden g_1 durch P und Q, g_2 durch P und R und g_3 durch Q und R und überprüfen deren Lage. Dazu verwenden wir jeweils die Punkt-Steigungsform der Geradengleichung und errechnen die Steigung m über das Steigungsdreieck:

$$m \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$g_1\colon y - 2 = \frac{8 - 2}{4 - 1} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 2x$$

$$g_2\colon y - 2 = \frac{1 - 2}{3 - 1} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

$$g_3\colon y - 8 = \frac{1 - 8}{3 - 4} \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y = 7x - 20$$

Wir lesen die Geradensteigungen $m_1 = 2$, $m_2 = -0{,}5$ und $m_3 = 7$ ab und erkennen, dass die beiden Geraden g_1 und g_2 zueinander senkrecht stehen, weil $m_1 \cdot m_2 = -1$. Folglich ist das Dreieck durch die Punkte P, Q und R rechtwinklig, der rechte Winkel befindet sich am Punkt P, dem gemeinsamen Punkt der beiden Geraden g_1 und g_2.

Berechnung von Schnittwinkeln mit Hilfe von Steigungswinkeln

> **Def**: *(Schnittwinkel)*
>
> *Der kleinere der beiden Winkel, die von zwei sich schneidenden Geraden g und h gebildet werden, heißt der Schnittwinkel von g und h.*

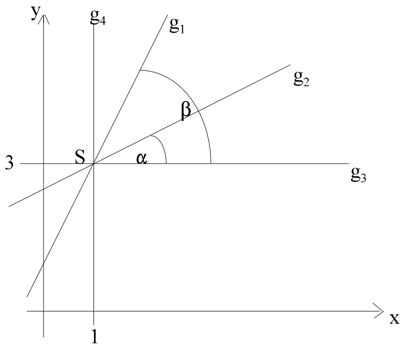
Bem: Für Schnittwinkel γ gilt: $0° \leq \gamma \leq 90°$

Beisp: *(Berechnung der Schnittwinkel von Geraden mit Steigung ≥ 0)*

Berechne die Schnittwinkel der folgenden vier Geraden:

$g_1\!: y = 2x + 1 \quad g_2\!: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad g_3\!: y = 3 \quad g_4\!: x = 1$

Die sich anschließende Zeichnung lässt vermuten, dass der Punkt S (1/3) allen vier Geraden gemeinsam ist; rechnerisch wird diese Vermutung durch Einsetzen in die Geradengleichungen bestätigt.



Wir berechnen zunächst die Steigungswinkel der vier Geraden:

Für g_1: $2 = \tan(\beta) \Rightarrow \beta = 63{,}43°$ Für g_2: $0{,}5 = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 26{,}57°$

g_3 verläuft parallel zur x-Achse mit dem Steigungswinkel $\gamma = 0°$; g_4 verläuft parallel zur y-Achse mit dem Steigungswinkel $\delta = 90°$. Für die Schnittwinkel ergibt sich:

$\sphericalangle(g_1, g_2) = \beta - \alpha = 36{,}86°$ $\sphericalangle(g_1, g_3) = \beta = 63{,}43°$ $\sphericalangle(g_1, g_4) = 90° - \beta = 26{,}57°$

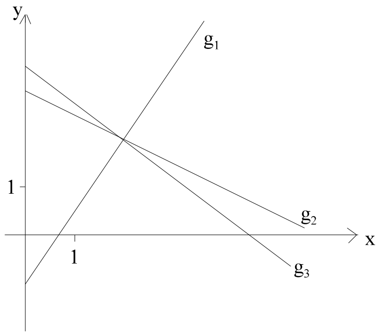
$\sphericalangle(g_2, g_3) = \alpha$ $\sphericalangle(g_2, g_4) = 90 - \alpha = 63{,}43°$ $\sphericalangle(g_3, g_4) = 90°$

Bem: Das im Beispiel verwendete Verfahren, den kleineren der beiden Steigungswinkel vom größeren abzuziehen, greift nicht nur bei der Schnittwinkelberechnung von Geraden mit einem Steigungswinkel größer oder gleich 0, sondern allgemein auch bei Winkeln mit negativem Vorzeichen. Es können sich so allerdings bei der Subtraktion Schnittwinkel von über 90° errechnen; die Rechnung liefert damit den größeren der beiden Winkel zwischen den betreffenden Geraden, und man findet den kleineren durch Subtraktion des gefundenen Winkelmaßes von 180°.

Beisp: *(Berechnung von Schnittwinkeln von Geraden)*

Berechne die Schnittwinkel der Geraden g_1, g_2, g_3 mit den Gleichungen

$g_1\colon y = \frac{3}{2}x - 1 \quad g_2\colon y = -\frac{1}{2}x + 3 \quad g_3\colon y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$



Wir berechnen die Steigungswinkel α zu g_1, β zu g_2 und γ zu g_3 und die Schnittwinkel der drei Geraden, indem wir jeweils den kleineren von dem größeren Winkel abziehen:

$g_1\colon \frac{3}{2} = \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 56{,}31\,^\circ \quad g_2\colon -\frac{1}{2} = \tan(\beta) \Rightarrow \beta = -26{,}57\,^\circ$

$g_3\colon -\frac{3}{4} = \tan(\gamma) \Rightarrow \gamma = -36{,}87\,^\circ$

$\alpha - \beta = 56{,}31 - (-26{,}57) \Rightarrow \sphericalangle(g_1, g_2) = 82{,}88\,^\circ$

$\alpha - \gamma = 56{,}31 - (-36{,}87) = 93{,}18\,^\circ \Rightarrow \sphericalangle(g1, g_3) = 180 - 93{,}18 = 86{,}82\,^\circ$

$\beta - \gamma = -26{,}57 - (-36{,}87) = 10{,}30\,^\circ \Rightarrow \sphericalangle(g_2, g_3) = 10{,}30\,^\circ$

Wir fassen zusammen:

Satz: *(Berechnung von Schnittwinkeln zweier Geraden)*

Ist g eine Gerade mit Steigungswinkel α und h eine Gerade mit Steigungswinkel β, und ist α<β, dann errechnet sich das Maß eines Winkels γ zwischen g und h durch: $\gamma = \beta - \alpha$

Ist $\gamma \leq 90^\circ$, dann ist der Schnittwinkel gleich γ. Lässt man als Winkelmaße auch negative Zahlen zu, ergibt sich unter Umständen $\gamma > 90^\circ$; in diesem Fall ist der größere der beiden möglichen Winkel zwischen g und h errechnet, und der Schnittwinkel zwischen g und h ist gleich 180 - γ.

Eine geschlossene Formel zur Schnittwinkelberechnung zweier Geraden

Ohne Beweis wird an dieser Stelle eine Formel angegeben, aus der sich der Schnittwinkel zweier Geraden, die in Hauptform beschreibbar sind, unmittelbar aus deren Steigungen berechnen lässt:

Satz: *(Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden aus den deren Steigungen)*

Sind zwei Geraden g_1, g_2 in Hauptform gegeben durch: g_1: $y = m_1 x + b_1$ g_2: $y = m_2 x + b_2$, dann kann man ihren Schnittwinkel γ errechnen aus:

$$\tan(\gamma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Verlaufen g_1 und g_2 parallel oder sind sie gleich, ergibt sich der Schnittwinkel $\gamma = 0$.

Beisp: *(Schnittwinkel zweier Geraden)*

Berechne den Schnittwinkel der beiden Geraden g_1: $y = 4x + 1$ g_2: $y = -2x + 4$

$$\tan(\gamma) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-2 - 4}{1 + 4 \cdot (-2)} = \frac{6}{7} \Rightarrow \gamma = 40{,}60^\circ$$

5.2 Differentialgeometrie von Funktionskurven im Allgemeinen

5.2.1 Gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen

Errechnen gemeinsamer Punkte von Funktionsgraphen

Def: *(Gemeinsamer Punkt zweier Funktionsgraphen)*

Ein Punkt $P(x_0/y_0)$ ist gemeinsamer Punkt der Funktionsgraphen zweier Funktionen f und g, wenn $f(x_0) = y_0 \quad \wedge \quad g(x_0) = y_0$

Das Rechenverfahren zur Ermittlung gemeinsamer Punkte zweier Funktionsgraphen wird durch folgenden Satz wiedergegeben.

Satz: *(Gemeinsame Punkte zweier Funktionsgraphen)*

Man ermittelt die x-Koordinaten gemeinsamer Punkte der Graphen zweier Funktionen f und g aus der Ansatzgleichung $f(x) = g(x)$

Die y-Koordinate eines gemeinsamen Punktes ergibt sich aus der Einsetzung einer gefundenen Lösung der Ansatzgleichung in eine der beiden Funktionsgleichungen.

Beisp: *(Gemeinsame Punkte zweier Funktionsgraphen)*

Berechne gemeinsame Punkte der Graphen der beiden Funktionen f und g mit den Gleichungen

$f(x) = x^2 - 4x + 6 \qquad g(x) = -x^2 + 8x - 12$

Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen liefert die x-Koordinaten gemeinsamer Punkte; hier:

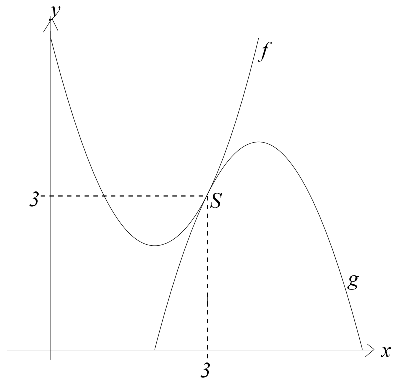
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow\ x^2 - 4x + 6 = -x^2 + 8x - 12 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \Leftrightarrow 2\,(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow$

$2\,(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Es gibt also genau einen gemeinsamen Punkt S der beiden Parabeln, dessen x-Koordinate den Wert x=3 aufweist. Man setzt nun x=3 in die Gleichung von f oder - ebenso gut - in die von g - ein und erhält die y-Koordinate des Schnittpunktes S:

$f(3) = 3^2 - 4{\cdot}3 + 6 = 3 \Rightarrow \qquad S(3/3)$

Die Zeichnung zeigt die beiden Funktionsgraphen mit dem gemeinsamen Punkt S:



Berührpunkte von Funktionsgraphen

Die Skizze zur zuletzt gelösten Aufgabe zeigt eine besondere Lage zweier Funktionsgraphen zueinander; sie berühren sich.

Def: *(Berührpunkt zweier Funktionsgraphen)*

Die Funktionsgraphen zweier Funktionen f und g berühren sich an einer Stelle x_0, wenn sie dort einen gemeinsamen Punkt und eine gemeinsame Tangente besitzen.

Berührpunkte ermittelt man rechnerisch auf folgendem Weg:

Satz: *(Berührpunkt)*

Weisen die Graphen zweier an der Stelle x_0 differenzierbarerFunktionen f und g an der Stelle x_0 keine zur y-Achse parallelen Tangenten auf, dann berühren sie sich, wenn

$f(x_0) = g(x_0) \quad \wedge \quad f'(x_0) = g'(x_0)$

Weisen beide Funktionen an der Stelle x_0 zur y-Achse parallele Tangenten auf, dann berühren sie sich, wenn $f(x_0) = g(x_0)$.

Bew: Im Falle nicht zur y-Achse paralleler Tangenten stellt man fest: Da eine Gerade, also auch eine

Tangente dann festgelegt ist, wenn ihre Steigung und ein Punkt auf ihr bekannt sind, müssen f und g dieselbe Tangente an der Stelle x_0 aufweisen, wenn sie dort einen gemeinsamen Punkt und eine gemeinsame Steigung haben.

Im Fall der zur y-Achsen parallelen Tangenten gibt es nichts zu beweisen.

Beisp: *(Berühren von Funktionsgraphen)*

Wir greifen das im letzten Abschnitt verwendete Beispiel wieder auf und überprüfen die beiden Funktionen f und g rechnerisch auf Berührpunkte; dabei verwenden wir die bereits rechnerisch erwiesene Tatsache, dass beide Funktionsgraphen in S(3/3) einen gemeinsamen Punkt aufweisen.

$f(x) = x^2 - 4x + 6$	$f(x) = 2x - 4$	$f(3) = 3$	$f'(3) = 2$
$g(x) = -x^2 + 8x - 12$	$g'(x) = -2x + 8$	$g(3) = 3$	$g'(3) = 2$

Also stimmen f und g an der Stelle $x_0 = 3$ jeweils im Funktionswert und der Steigung überein; sie berühren sich an der Stelle $x_0 = 3$.

Senkrechter Schnitt von Funktionsgraphen

Def: *(Senkrechter Schnitt zweier Funktionsgraphen)*

Die Funktionsgraphen zweier Funktionen f und g schneiden sich senkrecht an einer Stelle x_0, wenn sie dort einen gemeinsamen Punkt $P(x_0 / y_0)$ aufweisen und die Tangenten an den Graph von f und an den Graph von g im Punkt P zueinander senkrecht stehen.

Rechnerisch bietet sich folgender Weg an:

Satz: *(Senkrechter Schnitt zweier Funktionsgraphen)*

Weisen die Graphen zweier an der Stelle x_0 differenzierbarerFunktionen f und g an der Stelle x_0 beide keine senkrechten Tangenten auf, dann schneiden sie sich senkrecht, wenn

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \wedge \quad f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$$

Weist einer der beiden Graphen an der Stelle x_0 eine senkrechte Tangente auf, dann schneiden sie sich dort senkrecht, wenn der andere an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente ($f'(x_0) = 0$ beziehungsweise $g'(x_0) = 0$) aufweist.

Bew: Im Falle der zur y-Achse parallelen Tangenten ist nichts zu beweisen.

Ist keine der beiden Tangenten an die Graphen von f und g an der Stelle x_0 parallel zur y-Achse, dann weist die Tangente an den Graph von f an der Stelle x_0 die Steigung $m_f = f'(x_0)$ und die Tangente an den Graph von g an der Stelle x_0 die Steigung $m_g = g'(x_0)$ auf.

Für den Fall, dass beide Tangenten zueinander senkrecht sind, gilt: $m_f \cdot m_g = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$

Beisp: *(Senkrechter Schnitt von Funktionsgraphen)*

Stelle fest, wo sich die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = ax^2 \quad g(x) = -\frac{1}{a}x^2 + 2 \qquad (a \neq 0)$$

schneiden, und bestimme a so, dass der Schnitt rechtwinklig ist!

Die Graphen beider Funktionen sind Parabeln. Deshalb weist keine der beiden eine zur y-Achse parallele Tangente auf. Wir untersuchen also eine oder mehrere Schnittstellen x_0 unter folgenden beiden Bedingungen:

1. $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow a x_0^2 = -\frac{1}{a} x_0^2 + 2 \Leftrightarrow (a + \frac{1}{a})\, x_0^2 = 2$

2. $f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2ax_0 \cdot \frac{-1}{a} \cdot 2x_0 = -1 \Leftrightarrow -4x_0^2 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \vee x_0 = -\frac{1}{2}$

Für beide in Gleichung 2 gefundenen Werte von x_0 ergeben sich nach Einsetzen in Gleichung 1 dieselben Werte für a; man rechnet jeweils:

$$(a + \frac{1}{a})x_0^2 = 2 \Leftrightarrow (a + \frac{1}{a}) \cdot \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} = 8 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 8a + 16 = 16 - 1 \Leftrightarrow (a - 4)^2 = 15 \Leftrightarrow a = 4 + \sqrt{15} \vee a = 4 - \sqrt{15}$$

Steigungswinkel von Funktionsgraphen

Def: *(Steigungswinkel von Funktionsgraphen)*

Der Steigungswinkel α des Funktionsgraphen zu einer Funktion f an einer Stelle x_0 ist gleich dem Steigungswinkel der Tangente an den Graph von f an der Stelle x_0.

Ein rechnerischer Weg zur Ermittlung von Steigungswinkeln ist gegeben durch:

Satz: *(Steigungswinkel von Funktionsgraphen)*

Wenn die Tangente an den Graphen der an der Stelle x_0 differenzierbaren Funktion f an einer Stelle x_0 nicht parallel zur y-Achse verläuft, berechnet man den Steigungswinkel α des Funktionsgraphen von f an der Stelle x_0 über die Gleichung: $f'(x_0) = \tan(\alpha)$

Verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion f an einer Stelle x_0 parallel zur y-Achse, dann beträgt der Steigungswinkel 90°.

Bew: Für Geraden gilt für die Steigung m und den Steigungswinkel β die Beziehung $m = \tan(\beta)$.

Da die Tangentensteigung $m = f'(x_0)$, gilt für den Steigungswinkel α der Funktion f $f'(x_0) = \tan(\alpha)$.

Die Festlegung des Steigungswinkels α von f bei zur y-Achse paralleler Tangente an den Graph von f entspricht der Definition des Steigungswinkels bei senkrechten Geraden.

Schnittwinkel von Funktionsgraphen

Def: *(Schnittwinkel zwischen Funktionsgraphen)*

Der Schnittwinkel γ der Graphen zweier Funktionen f und g in einem gemeinsamen Punkt $P(x_0 / y_0)$ ist gleich dem Schnittwinkel der Tangenten an den Graph von f und an den Graph von g im Punkt P.

Die Berechnung des Schnittwinkels zweier Funktionen ergibt sich direkt aus der Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden. Hier hatten wir zwei Verfahren festgehalten; die Übertragung dieser beiden Verfahren auf den nun diskutierten Fall ergibt sich aus den beiden folgenden Sätzen:

Satz: *(Schnittwinkel zwischen Funktionsgraphen I)*

Ist f eine Funktion mit Steigungswinkel α und g eine Funktion mit Steigungswinkel β, und ist $\alpha<\beta$, dann errechnet sich das Maß eines Winkels γ zwischen f und g durch: $\gamma = \beta - \alpha$

Ist $\gamma \leq 90°$, dann ist der Schnittwinkel gleich γ. Ergibt sich $\gamma > 90°$, dann ist der größere der beiden möglichen Winkel zwischen f und g errechnet, und der Schnittwinkel zwischen f und g ist gleich $180 - \gamma$.

In einer geschlossenen Formel rechnet man:

Satz: *(Schnittwinkel zwischen Funktionsgraphen II)*

Der Schnittwinkel γ der Graphen zweier an der Stelle x_0 differenzierbarer Funktionen f und g im gemeinsamen Punkt $P(x_0 / y_0)$ errechnet sich, durch:

$$\tan(\gamma) = \frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

5.2.2 Tangenten und Normalen

Wir greifen zunächst einen im Kapitel “Lineare Approximation” gefundenen Satz auf:

Satz: *(Tangente)*

Die Gleichung einer nicht zur y-Achse parallelen Tangente t an den Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 lautet: $t: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Die Gleichung einer zur y-Achse parallelen Tangente an den Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 lautet: $t: x = x_0$

Eine zweite typische einen Graphen begleitende Gerade ist die Normale:

Def: *(Normale)*

Die Normale an den Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 ist diejenige Gerade, welche die Tangente an den Graph der Funktion im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ senkrecht im Berührpunkt schneidet.

Die Gleichung der Normale ergibt sich dann so:

Satz: *(Normalengleichung)*

Ist die Tangente t an den Graph einer Funktion f durch den Punkt $P(x_0/f(x_0)$ nicht parallel zur y-Achse, lautet die Normalengleichung:

$$n: \begin{cases} y - f(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) & f'(x_0) \neq 0 \\ x = x_0 & f'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Verläuft t parallel zur y-Achse, dann ergibt sich für n die Gleichung n: $y=f(x_0)$.

Bew: Für zwei zueinander senkrechte Geraden in Hauptform mit den Gleichungen

$g_1 : y = m_1 x + b_1$ $\qquad$ $g_2 : y = m_2 x + b_2$

gilt, falls g_1 nicht parallel zur x-Achse verläuft, wenn also $m_1 \neq 0$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Überträgt man diese Feststellung auf die Lage einer Tangente t in der Rolle von g_1 mit $m_1 = f'(x_0)$ und einer Normale n in der Rolle von g_2, dann lässt sich die Steigung m_2 von n im Falle, dass t nicht waagerecht zur x-Achse verläuft, berechnen durch:

$$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{f'(x_0)}$$

Dadurch ergibt sich unter Verwendung der Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung bei nicht waagerechter Tangente folgende Normalengleichung von n durch den Punkt $P(x_0/f(x_0)$:

$$n: y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} (x - x_0)$$

Bildet t eine Parallele zur x-Achse, dann ist n eine Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P(x_0/f(x_0)$; die zugehörige Geradengleichung lautet dann: n: $x = x_0$. Bildet t eine Parallele zur y-Achse verläuft n parallel zur x-Achse mit der Gleichung n:$y=f(x_0)$.

Die erste Grundaufgabe zu Tangenten und Normalen: Ermitteln von Tangenten- und Normalengleichungen, wenn P (x_0/f(x_0)) *bekannt*

Beisp: *(Tangenten- und Normalengleichung bei bekanntem gemeinsamen Punkt von t mit G_f)*

Ermittele die Gleichung der Tangente t und Normale n an den Graph der Funktion f mit $f(x)=x^3-x$ an der Stelle $x_0=1$!

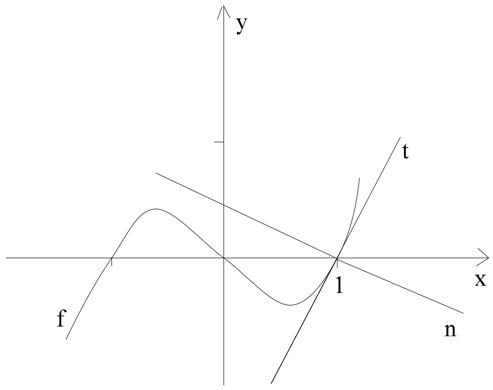
Um die Tangenten- und Normalengleichung aufstellen zu können, genügt es $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ zu ermitteln: $f(x_0) = f(1) = 1^3 - 1 = 0 \Rightarrow P = (1/0)$ $\quad f'(x_0) = 3x_0^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 3\cdot 1^2 - 1 = 2$

Damit ergibt sich:

$$t\colon\ y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = 2\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

$$n\colon\ y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = \frac{-1}{2}\cdot(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Eine Zeichnung verdeutlicht die Rechnung:



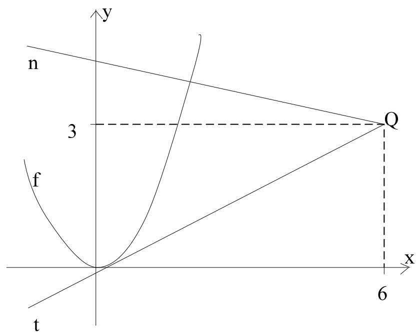
Die zweite Grundaufgabe zu Tangenten und Normalen: Ermitteln von Tangenten- und Normalengleichungen, wenn P (x_0/f(x_0)) *unbekannt*

Beisp: *(Tangenten und Normalen an die Normalparabel)*

Bestimme alle Tangenten und Normalen, die sich vom Punkt Q(6/3) an die Normalparabel legen lassen!

Der wesentliche Unterschied zur vorhergehenden Aufgabe ist, dass der Punkt Q(6/3) nicht zur Parabel gehört, man also Tangenten beziehungsweise Normalen “von außerhalb” an die Normalparabel legt und der in den Formeln benötigte gemeinsame Punkt P(x_0/f(x_0)) des Funktionsgraphen von f und der Tangente- beziehungsweise Normale unbekannt ist.

In einer ersten Orientierung zeigt die Zeichnung den Punkt Q und jeweils eine Tangente t und eine Normale n, die von Q aus an den Graph der Normalparabel gelegt werden können. Die Rechnung soll die zugehörigen Geradengleichungen ermitteln und zeigen, ob es weitere Tangenten beziehungsweise Normalen an den Graphen von f gibt, die den Punkt Q beinhalten.



Wir setzen zunächst - unter Ausnutzung der Kenntnis der Funktionsgleichung der Normalparabel - allgemein an:

Tangenten an den Graph der Normalparabel haben die Form:

$$t\colon\ y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \iff y - x_0^2 = 2x_0\cdot(x - x_0)$$

Der Punkt Q(6/3) muss diese Tangentengleichung erfüllen. Das bedeutet: Setzt man die Koordinaten von Q in die Tangentengleichung jeweils an der Stelle von x und y ein, ergibt sich eine wahre Aussage. Diese Einsetzung liefert eine Gleichung für x_0, mit deren Hilfe mögliche Tangentenberührpunkte ermittelt werden können. Hier findet man:

$$3 - x_0^2 = 2x_0\cdot(6 - x_0) \iff 3 - x_0^2 = 12x_0 - 2x_0^2 \iff x_0^2 - 12x_0 = -3 \iff$$

$$x_0^2 - 12x_0 + 36 = 33 \iff (x_0 - 6)^2 = 33 \iff x_0 = 6 + \sqrt{33} \ \vee\ x_0 = 6 - \sqrt{33}$$

Damit ergeben sich zwei Tangentenberührpunkte:

$P_1(6+\sqrt{33}\,/\,(6+\sqrt{33})^2) \approx (11{,}74/137{,}93)$ $\quad P_2(6-\sqrt{33}\,/\,(6-\sqrt{33})^2) \approx (0{,}26/0{,}07)$

Die entsprechenden Tangenten findet man durch Einsetzen der Tangentenberührpunkte in die Ansatzgleichung:

$$P_1 \quad t\colon\ y-(6+\sqrt{33})^2 = 2(6+\sqrt{33})\cdot(x-(6+\sqrt{33})) \iff$$

$$y = (12+2\sqrt{33})x-(6+\sqrt{33})^2 \approx 23{,}49\,x - 137{,}93$$

$$P_2 \quad t\colon\ y-(6-\sqrt{33})^2 = 2(6-\sqrt{33})\cdot(x-(6-\sqrt{33})) \iff$$

$$y = (12-2\sqrt{33})x-(6-\sqrt{33})^2 \approx 0{,}51x - 0{,}07$$

Normalen vom Punkt Q an den Graph der Parabel sind nach der Zeichnung offensichtlich keine Parallelen zur y-Achse; die Geradengleichungsform $x=x_0$ kommt für eine Normale deshalb nicht in Frage. Wir erhalten:

$$3 - x_0^2 = \frac{-1}{2x_0}\cdot(6 - x_0) \iff -6x_0 + 2x_0^3 = 6 - x_0 \iff 2x_0^3 - 5x_0 - 6 = -0$$

Eine durch Raten ermittelte Lösung dieser Gleichung dritten Grades für x_0 ist $x_0 = 2$. Wir dividieren diese Lösung mit einer Polynomdivision heraus:

$$\begin{array}{l}(2x_0^3 - 0x_0^2 - 5x_0 - 6) : (x_0 - 2) = 2x_0^2 + 4x_0 + 3 \\ \underline{2x_0^3 - 4x_0^2} \\ \qquad 4x_0^2 - 5x_0 \\ \qquad \underline{4x_0^2 - 8x_0} \\ \qquad\qquad 3x_0 - 6 \\ \qquad\qquad \underline{3x_0 - 6} \\ \qquad\qquad\qquad 0\end{array}$$

Der sich ergebende quadratische Rest liefert keine weiteren Nullstellen, denn der entsprechende Ansatz führt zu einem unlösbaren Widerspruch:

$$2x_0^2 + 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow 2(x_0^2 + 2x_0 + \frac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 + 1 = 1 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2 = -\frac{1}{2}$$

Es ergibt sich also nur eine Normale an den Graph der Normalparabel, die durch den Punkt Q(6/3) verläuft; diese schneidet die Parabel bei $x_0=2$. Ihre Gleichung lautet:

$$n\text{: } y - 2^2 = \frac{-1}{2\cdot 2} \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

Das nächste Beispiel zeigt, dass man auch allgemeinere Fragestellungen mit Hilfe der vorgestellten Rechenverfahren beantworten kann:

Beisp: *(Möglichkeiten, Tangenten an die Normalparabel zu legen)*

Untersuche, von welchen Punkten Q(a/b) des Koordinatensystems man Tangenten an den Graph der Normalparabel legen kann!

Man setzt wie im zuvor berechneten Beispiel mit der allgemeinen Tangentengleichung an, ersetzt x und y mit den entsprechenden Koordinaten von Q und versucht, eine Lösung für x_0 zu finden:

$$t\text{: } y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^2 = 2x_0 \cdot (x - x_0)$$

$$b - x_0^2 = 2x_0 \cdot (a - x_0) \Leftrightarrow b - x_0^2 = 2ax_0 - 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 2ax_0 = -b \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 2ax_0 + a^2 = -b + a^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 = -b + a^2$$

Die quadratische Gleichung, die sich schließlich für x_0 ergeben hat, hat

- keine Lösung, falls $-b + a^2 < 0$, also $a^2 < b$;
- genau eine Lösung, falls $-b + a^2 = 0$, also $a^2 = b$; hier gilt:

  $$(x_0 - a)^2 = -b + a^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = a$$
- genau zwei Lösungen, falls $-b + a^2 > 0$, also $a^2 > b$; hier rechnet man:

  $$(x_0 - a)^2 = -b + a^2 \Leftrightarrow x_0 - a = \sqrt{-b + a^2} \vee x_0 - a = -\sqrt{-b + a^2}$$

  $$x_0 = a + \sqrt{-b + a^2} \vee x_0 = a - \sqrt{-b + a^2}$$

Die genannten Fälle treffen eine Aussage über die Beziehung der Koordinaten a und b des Punktes Q(a/b). In geometrischer Interpretation stellen wir fest:

- Ist $a^2=b$, schreibt man für Q die Koordinaten Q (a / a^2); Q liegt dann also selbst auf der Normalparabel; in diesem Fall gibt es genau eine Tangente an den Graph der Normalparabel, die den Punkt Q beinhaltet, und Q ist selbst der Berührpunkt zwischen der Tangente und der Parabel.

- Ist $a^2 < b$, liegt Q oberhalb, also im “Inneren”, der Normalparabel, weil die y-Koordinate b von Q an jeder Stelle a größer als a^2 ist. Es ist also nicht möglich vom Inneren der Normalparabel eine Tangente an die Normalparabel zu legen.

- Ist $a^2 > b$, liegt Q unterhalb der Normalparabel, weil die y-Koordinate b von Q an jeder Stelle a kleiner als a^2 ist. Von jedem Punkt unterhalb der Parabel kann man also genau zwei Tangenten an den Graph der Normalparabel legen.

5.3 Monotonie und lokale Extremstellen

5.3.1 Monotonieverhalten differenzierbarer Funktionen

Wir wiederholen den aus früheren Klassen bekannten Begriff der Monotonie von Funktionen auf einem Intervall I:

Def: *(monotone und streng monotone Funktionen)*

Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ heißt monoton wachsend auf einem Intervall $I\subseteq D$ genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1<x_2$ gilt: $f(x_1)\leq f(x_2)$.

Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend auf einem Intervall $I\subseteq D$ genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1<x_2$ gilt: $f(x_1)<f(x_2)$.

Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ heißt monoton fallend auf einem Intervall $I\subseteq D$ genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1<x_2$ gilt: $f(x_1)\geq f(x_2)$.

Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ heißt streng monoton fallend auf einem Intervall $I\subseteq D$ genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1<x_2$ gilt: $f(x_1)>f(x_2)$.

In dieser Definition ist von Steigungen, nicht aber von Ableitungen die Rede. Da wir uns aber seit längerer Zeit mit Steigungen zusammen mit Ableitungen beschäftigen, liegt es nahe, den Begriff der Monotonie für differenzierbare Funktionen zu formulieren.

Auf den ersten Blick scheint das Monotonieverhalten einer differenzierbaren Funktion f einfach über das Vorzeichen der Ableitung f′ feststellbar zu sein; tatsächlich gibt es - in genauerer Formulierung - einen vergleichbaren Satz.

Satz: *(Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen)*

Ist f eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x)>0$ im Inneren von I, dann ist f auf I streng monoton steigend.

Ist f eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion mit $f'(x)<0$ im Inneren von I, dann ist f auf I streng monoton fallend.

Der Satz über das Monotoniekriterium für differenzierbare Funktionen wirkt so glatt, dass man nicht an Schwierigkeiten denkt; trotzdem sind in der einfachen Formulierung Details versteckt, die einer näheren Betrachtung bedürfen:

Die Umkehrung des Monotoniekriteriums gilt nicht, denn streng monotone Funktionen weisen nicht immer ausschließlich positive (bzw. negative) Werte der ersten Ableitung auf.

Beisp: *(Eine streng monoton wachsende Funktion mit nicht ausschließlich positiver Ableitung)*

Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ mit der Gleichung $f(x) = x^3$. Diese Funktion ist überall streng monoton wachsend, denn für beliebige Zahlen x_1, x_2 mit $x_1<x_2$ gilt auch $x_1^3<x_2^3$.

Man stellt jedoch fest, dass die Ableitung von f an der Stelle $x_0=0$ gleich 0 ist; denn:

$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$

Immerhin gilt:

Satz: *(Vorzeichen der Ableitung streng monotoner Funktionen)*

Ist eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion streng monoton steigend, dann ist $f'(x)\geq 0$ für alle $x\in I$.

Ist eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion streng monoton fallend, dann ist $f'(x)\leq 0$ für alle $x\in I$.

Wesentlich weniger leicht offenbart sich eine weitere Schwierigkeit des Monotoniebegriffs differenzierbarer Funktionen, die versteckt ist in der Forderung, dass f auf einem Intervall, nicht etwa nur an einem einzelnen Punkt, ein immer positives beziehungsweise immer negatives Vorzeichen aufweisen soll. Es kann nämlich folgender Fall eintreten:

Ist f eine differenzierbare Funktion und ist $f'(x_0) > 0$, dann ist f nicht notwendig streng monoton wachsend in der Nähe von x_0.

Ist f eine differenzierbare Funktion und ist $f'(x_0) < 0$, dann ist f nicht notwendig streng monoton fallend in der Nähe von x_0.

Beisp: *(Eine Funktion, die in der Nähe von x_0 nicht streng monoton steigt, obwohl $f'(x_0) > 0$)*

Gegeben ist die Funktion f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

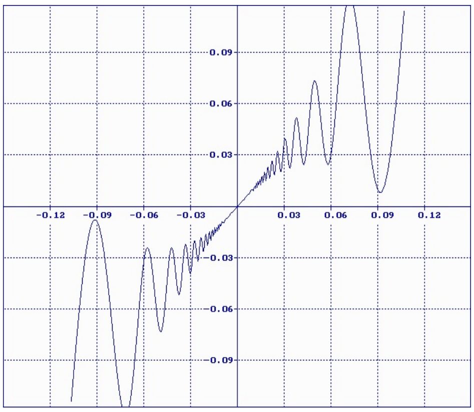
$$f(x) = \begin{cases} x + 10x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Man findet die erste Ableitung an der Stelle x=0 über eine elementare Herleitung:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x + 10x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 0}{x} = 1 + 10x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(0) = 1$$

Ohne weitere Rechnungen entnehmen wir dem Bild des Graphen von f, dass durch das Oszillieren in beliebiger Nähe des Nullpunktes auch negative Steigungen auftreten, f also in der Nähe von 0 nicht streng monoton steigt.



Anhand des gezeigten Beispiels haben wir festgestellt, dass man aus den Bedingungen $f'(x_0) > 0$ beziehungsweise $f'(x_0) < 0$ an einer einzelnen Stelle x_0 nicht unbedingt auf strenge Monotonie der Funktion f in der Nähe von x_0 schließen kann, weil Monotonie eine Eigenschaft ist, die Funktionen auf einem Intervall zugeschrieben wird.

Formuliert man jedoch etwas schwächer, dann kann man feststellen, dass auch in Sonderfällen wie im gezeigten Beispiel die Funktion f einen mit der Eigenschaft $f'(x_0)>0$ isolierten Punkt $(x_0/f(x_0))$ “steigend durchläuft”, beziehungsweise einen mit der Eigenschaft $f'(x_0)<0$ isolierten Punkt $(x_0/f(x_0))$ “fallend durchläuft”. Genau wird diese Feststellung zusammengefasst durch:

Satz: *(lokale Trennungseigenschaft)*

Ist f eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion und ist f $(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in I$, dann gibt es eine Umgebung U von x_0 so, dass für alle $x \in U$ mit $x < x_0$ gilt: $f(x) < f(x_0)$; für alle $x \in U$ mit $x > x_0$ gilt $f(x) > f(x_0)$. Kurz: Wenn $f'(x_0) > 0$, findet man links der x_0 kleinere, rechts größere Funktionswerte als $f(x_0)$.

Ist f eine auf einem Intervall I differenzierbare Funktion und ist f $(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in I$, dann gibt es eine Umgebung U von x_0 so, dass für alle $x \in U$ mit $x < x_0$ gilt: $f(x) > f(x_0)$; für alle $x \in U$ mit $x > x_0$ gilt $f(x) < f(x_0)$. Kurz: Wenn $f'(x_0) < 0$, findet man links der x_0 größere, rechts kleinere Funktionswerte als $f(x_0)$.

5.3.2 Lokale Extrema differenzierbarer Funktionen

Def.: *(Lokale Extremstelle, lokale Minimumstelle, lokale Maximumstelle, lokales Minimum, lokales Maximum, lokales Extremum, lokaler Tiefpunkt, lokaler Hochpunkt, lokaler Extrempunkt)*

$f: I \to \mathbb{R}$ sei eine auf einem Intervall I definierte Funktion.

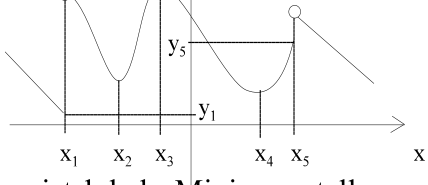
Eine Stelle $x_E \in I$ heißt lokale Minimumstelle von f, wenn es eine Umgebung U von x_E gibt, in der gilt: $f(x) \geq f(x_E)$ für alle $x \in U$. Der Funktionswert $f(x_E)$ heißt dann lokales Minimum, der Punkt $T(x_E/f(x_E))$ ein lokaler Tiefpunkt.

Eine Stelle $x_E \in I$ heißt lokale Maximumstelle von f, wenn es eine Umgebung U von x_E gibt, in der gilt: $f(x) \leq f(x_E)$ für alle $x \in U$. Der Funktionswert $f(x_E)$ heißt dann lokales Maximum, der Punkt $H(x_E/f(x_E))$ ein lokaler Hochpunkt.

Ist eine Stelle x_E lokale Minimum- oder lokale Maximumstelle einer Funktion f, dann nennt man sie lokale Extremstelle. Der Funktionswert $f(x_E)$ heißt dann lokales Extremum, der Punkt $E(x_E/f(x_E))$ ein lokaler Extrempunkt.

Beisp: *(lokale Extrempunkte)*

Beurteile ob es sich bei den Stellen x_1 , ..., x_5 um lokale Extremstellen handelt!



x_1 ist lokale Minimumstelle, weil in der Umgebung von x_1 kein kleinerer Funktionswert als y_1 vorkommt; ebenso sind x_2 und x_4 lokale Minimumstellen. x_3 ist leicht erkennbar eine lokale Maximumstelle. x_5 ist keine Extremstelle, weil in unmittelbarer Umgebung von x_5 Funktionswerte sowohl kleiner als auch größer als y_5 angenommen werden.

Ist eine Funktion f differenzierbar, dann kann man die Menge der Stellen, die für eine lokale Extremstelle in

Frage kommen, stark einschränken, sich also die rechnerische Suche nach lokalen Extremstellen vereinfachen. Denn es gilt:

> **Satz**: *(Notwendige Bedingung für lokale Extrema differenzierbarer Funktionen)*
>
> *Ist $f: I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I definierte, differenzierbare Funktion, und ist x_E eine innere Stelle des Intervalls und lokale Extremstelle von f, dann ist $f'(x_E)=0$.*

Bew: Nimmt man an, an der lokalen Extremstelle x_E gelte $f'(x_E)>0$. Das bedeutet nach der lokalen Trennungseigenschaft von f, dass der Graph von f den Punkt $(x_E / f(x_E))$ steigend durchläuft; also befindet sich an der Stelle x_E - im Gegensatz zur Voraussetzung - kein lokaler Extrempunkt.

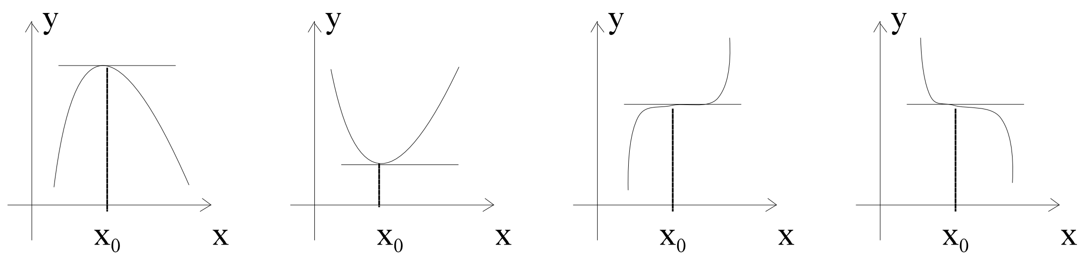
Nimmt man an, an der lokalen Extremstelle x_E gelte $f'(x_E)<0$. Das bedeutet nach der lokalen Trennungseigenschaft von f, dass der Graph von f den Punkt $(x_E / f(x_E))$ fallend durchläuft; also befindet sich an der Stelle x_E - im Gegensatz zur Voraussetzung - kein lokaler Extrempunkt.

Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass an der lokalen Extremstelle x_E gilt: $f'(x_E)=0$.

> Wir haben nun zwar eingesehen, dass für eine differenzierbare Funktion f an jeder lokalen Extremstelle x_E gilt: $f'(x_E)=0$; es ist jedoch umgekehrt nicht so, dass jede Stelle x_0 mit der Eigenschaft $f'(x_0)=0$ lokale Extremstelle von f ist.

Wir betrachten die Sachlage aus geometrischer Sicht: Die Information $f'(x_0)=0$ bedeutet, dass an der Stelle x_0 die Steigung 0 vorliegt, man dort also eine waagerechte Tangente findet. Der Graph von f kann in der Nähe einer Stelle x_0 mit waagerechter Tangente folgende Standards erfüllen:

Hochpunkt Tiefpunkt aufsteigender/absteigender Sattelpunkt



Die gezeichneten Standardfälle lassen sich auch rechnerisch formulieren:

> **Satz**: *(Feststellen von Extremstellen durch Vorzeichenuntersuchung der 1. Ableitung)*
>
> *Ist $f'(x_E)=0$ und ist in einer Umgebung von x_E das Vorzeichen der ersten Ableitung*
> - *positiv für alle $x<x_E$ und negativ für alle $x>x_E$, dann ist x_E lokale Maximumstelle,*
> - *negativ für alle $x<x_E$ und positiv für alle $x>x_E$, dann ist x_E lokale Miniumstelle.*
>
> *Ist $f'(x_E)=0$ und wechselt das Vorzeichen der ersten Ableitung innerhalb einer Umgebung von x_E nicht, dann liegt ein Sattelpunkt vor.*

Beisp: *(Feststellen lokaler Extrema durch Vorzeichenuntersuchung der 1. Ableitung)*

Gegeben sind folgenden Funktionen f und g über ihre Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \qquad g(x) = 2x^3 - x^4$$

Für die Ableitungsfunktionen f´ und g´ erhält man folgende Terme:

$$f'(x) = x^2 - 4x \qquad g'(x) = 6x^2 - 4x^3$$

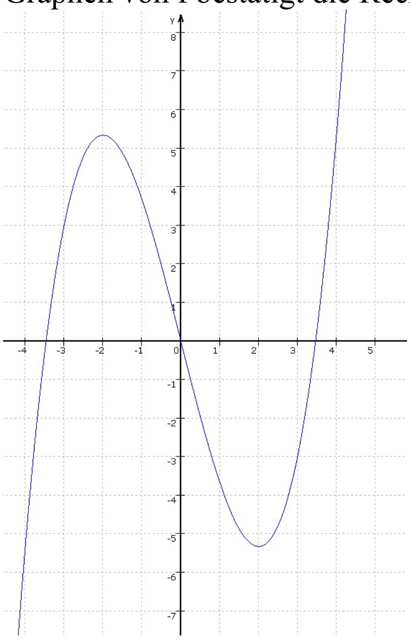
Kandidaten für Extremstellen der Funktion f ergeben sich durch:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Nun wird das Vorzeichenverhalten der Ableitungsfunktion f´ zwischen den gefundenen Stellen x=-2 und x=2 bestimmt. Anhand der Vorzeichenwechsel von f´ lässt sich ermitteln, ob sich unter den durch den Ansatz f´(x)=0 ermittelten Kandidaten eine Extremstelle befindet. Es ergibt sich folgende Übersicht:

x	x < -2	x = -2	-2 < x < 2	x = 2	x > 2
f´(x)	>0	0	<0	0	>0
Bemerkung	streng monoton steigend	lokale Maxim-umstelle	streng monoton fallend	lokale Minim-umstelle	streng monoton steigend

Also weist f den Hochpunkt H(-2 / 16/3) und den Tiefpunkt T (2 / -16/3) auf. Das Schaubild des Graphen von f bestätigt die Rechnungen:



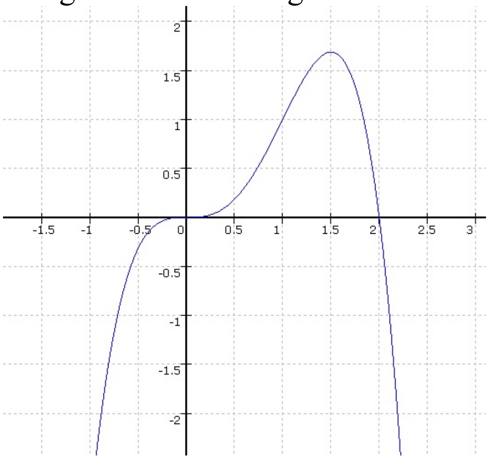
Das gleiche Verfahren angewendet auf die Funktion g ergibt:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1{,}5$$

Die Vorzeichenwechseluntersuchung von g´ ergibt:

x	x < 0	x = 0	0 < x < 1,5	x = 1,5	x > 1,5
g´(x)	>0	0	>0	0	<0
Bemerkung	streng monoton steigend	Sattelstelle	streng monoton steigend	lokale Maxim-umstelle	streng monoton fallend

Man hat folglich den Sattelpunkt S(0/0) und den Hochpunkt H(1,5 / 27/16) gefunden. Das Schaubild von g schließt die Aufgabe ab.



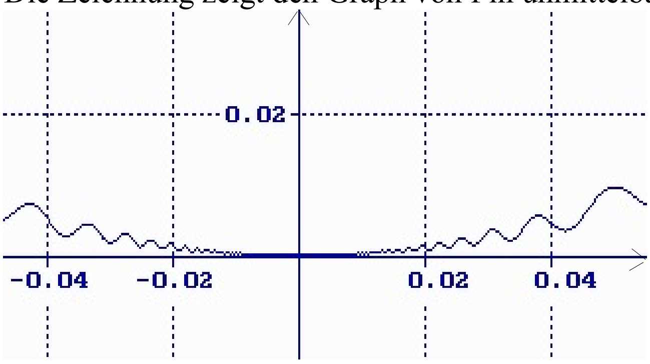
Neben den gezeigten Standardfällen registriert man auch andere Verlaufsmöglichkeiten in der Umgebung von Stellen mit waagerechter Tangente; es gibt zum Beispiel durchaus Tiefpunkte von Funktionsgraphen, wo das so plausible Kriterium “vor dem Tiefpunkt fallend, danach steigend” nicht zutrifft, das dargestellte Verfahren zur Ermittlung von Extrempunkten also versagt. Solche Fälle treten dann auf, wenn das Vorzeichen der Ableitung in einer Umgebung einer Stelle x_E mit $f'(x_E)=0$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt. Das folgende Beispiel behandelt das Auffinden eines solchen Tiefpunktes; analoge, der naiven Anschauung widersprechende Beispiele findet man auch für Hoch- oder Sattelpunkte.

Beisp: *(Versagen des Verfahrens vom Vorzeichenwechsel von f´)*

Gegeben ist die Funktion f durch ihre Gleichung:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Die Zeichnung zeigt den Graph von f in unmittelbarer Umgebung des Nullpunktes:



Die Zeichnung lässt eine waagerechte Tangente bei x=0 vermuten; auch scheint ein Tiefpunkt dort vorzuliegen. Das Kriterium vom Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung wird jedoch nicht anwendbar sein, weil die Richtung der Steigung von f und damit das Vorzeichen von f′ in beliebiger Nähe des Nullpunktes ständig wechseln.

Rechnerisch wird ein solcher Fall durch folgendes Vorgehen gelöst:

- Bestimmung der Ableitung an der Stelle x=0

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{3x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = 3x + x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

- Bestätigung des Tiefpunktes T(0/0)

  Die Sinusfunktion nimmt - unabhängig von ihrem Argument - nur Werte zwischen -1 und 1 an; das bedeutet hier:

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

  Also gilt für f(x): $3x^2 + x^2 \cdot (-1) \le f(x) = 3x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 3x^2 + x^2 \cdot 1$

  Damit ist f(x) abschätzbar durch: $2x^2 \le f(x) \le 4x^2$

  Da $x^2 \ge 0$ für alle x, entnimmt man daraus die Information, dass $f(x) \ge 0$ für alle x. Eine Stelle, wo f den Funktionswert 0 annimmt, muss also Minimalstelle sein. Also ist 0 Minimalstelle, denn f(0)=0.

5.4 Krümmung und Wendepunkte

5.4.1 Qualitative Krümmungsmessung

Die Ansicht von Funktionsgraphen zeigt, dass gekrümmte Kurven in der Regel an verschiedenen Stellen verschieden stark ansteigen. Beachtet man weiter die Tendenz der Steigung zu- oder abzunehmen, dann stellt man fest, dass ein Funktionsgraph in Intervallen, wo die Steigung zunimmt, linksgekrümmt und in Intervallen, wo die Steigung abnimmt, rechtsgekrümmt ist.

Setzt man diese Betrachtungen zur Krümmung in Zusammenhang mit dem Begriff der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f, dann äußert sich Linkskrümmung über einem Intervall I in streng monotonem Wachstum der Ableitungsfunktion f' in I, Rechtskrümmung entspricht streng monotonem Fallen von f' in I. Man definiert entsprechend:

Def: *(Krümmung einer differenzierbaren Funktion über einem Intervall)*

Ist eine Funktion f über einem Intervall I differenzierbar und ist f´ die Ableitungsfunktion zu f, dann heißt f
- *linksgekrümmt über I, falls f´ über I streng monoton steigt,*
- *rechtsgekrümmt über I, falls f über I streng monoton fällt.*

Eine Bemerkung: Ein allgemeinerer Krümmungsbegriff, der auch für nicht differenzierbare Funktionen gelten könnte, ist mit dieser Definition unterdrückt.

Bezeichnet man mit f´´ die Ableitung der Ableitungsfunktion f´, dann findet man ein dem Monotoniekriterium entsprechendes Krümmungskriterium so:

Satz: *(Krümmungskriterium für zweimal differenzierbare Funktionen)*

Ist eine Funktion f über einem Intervall I zweimal differenzierbar, dann ist f
- linksgekrümmt auf I, falls $f''(x)>0$ für alle x aus dem Inneren von I,
- rechtsgekrümmt auf I, falls $f''(x)<0$ für alle x aus dem Inneren vom I.

Beisp: *(Krümmungskriterium)*

Untersuche das Krümmungsverhalten der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^4 + x^2 + x + 7$.

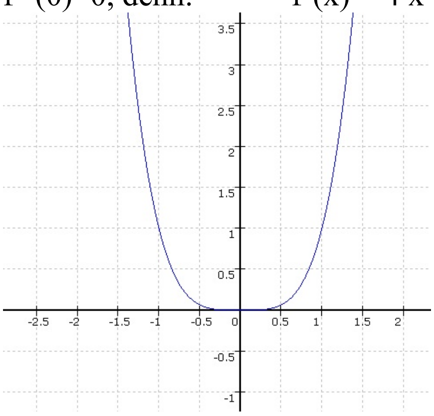
Wir bestimmen die erste und die zweite Ableitung: $f'(x) = 4x^3 + 2x + 1 \quad f''(x) = 12\,x^2 + 2$

Da ein Quadrat niemals einen negativen Wert aufweisen kann, findet man: $f''(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Folglich ist der Graph von f überall linksgekrümmt.

Das Krümmungskriterium ist, wie das Monotoniekriterium auch, nicht umkehrbar; es gibt zum Beispiel Funktionen, welche auf einem Intervall I linksgekrümmt sind, für die aber nicht für alle $x\in I$ gilt: $f''(x)>0$.

Beisp: *(Eine linksgekrümmte Funktion mit nicht überall positiven Werten der 2. Ableitung)*

Der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^4$ ist überall linksgekrümmt; trotzdem gilt $f''(0)=0$, denn: $f'(x) = 4\,x^3 \quad f''(x) = 12\,x^2$ also $f''(0)=0$



Entsprechend der Bezeichnung von Extremstellen als Stellen der Monotonieänderung von f, gibt man Stellen, wo sich das Krümmungsverhalten einer Funktion f ändert, einen eigenen Namen:

> **Def**: *(Wendestellen 1. Version)*
>
> *Wendestellen sind Stellen, an denen eine Funktion f ihr Krümmungsverhalten ändert.*

Entsprechend unserer Definition der Krümmung kann man auch sagen:

> **Def**: *(Wendestellen 2. Version)*
>
> *Wendestellen sind Stellen, an denen die Ableitungsfunktion f´ ihr Monotonieverhalten ändert, sind also dort, wo f', damit also die Steigung, ein relatives Minimum oder relatives Maximum hat.*

Wie bei der Aufdeckung lokaler Extremstellen differenzierbarer Funktionen f findet man Wendestellen, wenn man die Extremstellen der Ableitungsfunktion f ´bestimmt. Das Vorgehen wird also aus den Ergebnissen zur Extremstellenbestimmung übernommen. Zunächst wird auch hier - unter der Voraussetzung der zweifachen Differenzierbarkeit von f - die Menge der Kandidaten für eine Wendestelle drastisch verringert:

> **Satz**: *(Notwendiges Wendestellenkriterium für zweimal differenzierbare Funktionen)*
>
> *Ist f auf einem Intervall I zweimal differenzierbar, und ist x_W eine innere Stelle von I und Wendestelle von f, dann gilt: $f''(x_W) = 0$.*

Im Falle der Erfüllung des notwendigen Wendestellenkriteriums ist noch nicht gesagt, dass tatsächlich eine Wendestelle vorliegt (genauso wenig, wie die Erfüllung des notwendigen Extremstellenkriteriums $f'(x)=0$ die Existenz einer Extremstelle garantiert). Man muss vielmehr, wie von der Extremstellenuntersuchung her schon gewohnt, die näheren Umstände genauer untersuchen.

> **Satz**: *(Wendestellenbestimmung über die Vorzeichenuntersuchung der zweiten Ableitung)*
>
> *Ist $f''(x_W)=0$ und ist in einer Umgebung von x_W für alle $x_1<x_W$ das Vorzeichen von $f''(x_1)$ entgegengesetzt dem Vorzeichen von $f''(x_2)$ für alle Zahlen $x_2 > x_W$, dann ist x_W ein Wendepunkt.*

Beisp: *(Bestimmung von Wendepunkten)*

Untersuche die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + 2x - 1$$

auf Wendestellen!

Wir bestimmen die erste und zweite Ableitung von f:

$$f'(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2 \qquad f''(x) = x^3 + 2x^2$$

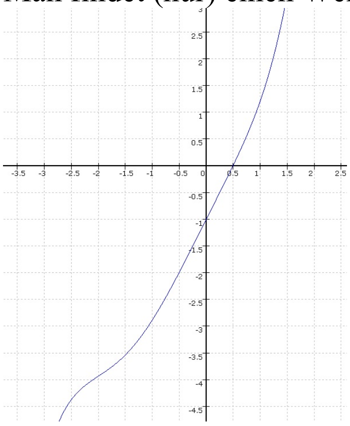
Kandidaten für Wendepunkte findet man über den Ansatz f´´(x)=0; es ergibt sich:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\,(x+2) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

Die Vorzeichenuntersuchung von f´´ ergibt:

x	x < -2	x = -2	-2 < x < 0	x = 0	x > 0
f´´(x)	<0	0	>0	0	>0
Bemerkung	rechts-gekrümmt	Wendepunkt	linksgekrümmt	kein Wende-punkt	linksgekrümmt

Man findet (nur) einen Wendepunkt W(-2/-3,93).

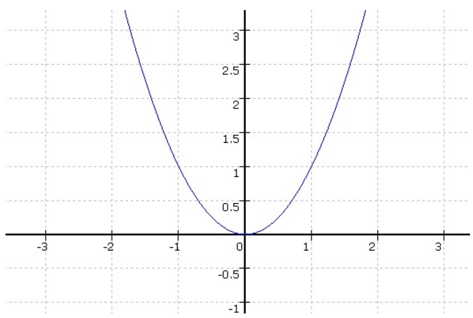


Das dargestellte Verfahren zur Wendestellenbestimmung scheitert - wie in vergleichbaren Situationen bei der Bestimmung von Extremstellen - dann, wenn in der Umgebung einer Stelle x_W mit $f''(x_W)=0$ das Vorzeichen der zweiten Ableitung unendlich oft wechselt.

5.4.2 Quantitative Krümmungsmessung

Die erste Ableitung $f'(x_0)$ gibt über ihr Vorzeichen Informationen darüber, ob eine Funktion an einer Stelle x_0 steigt oder fällt; darüber hinaus kann man am Betrag $|f'(x_0)|$ ablesen, wie stark das Steigen beziehungsweise Fallen ausfällt. Das folgende Beispiel lehrt, dass die zweite Ableitung $f''(x_0)$ zwar über ihr Vorzeichen eine Information über die Richtung der Krümmung gibt, aber nicht aussagt, welche Stärke die Krümmung aufweist.

Beisp: *(Krümmung der Normalparabel)*

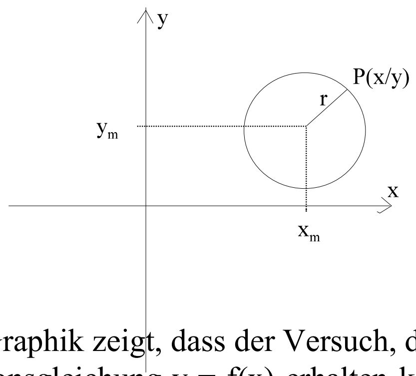


Wir untersuchen die Normalparabel mit der Gleichung $f(x) = x^2$ auf ihr Krümmungsverhalten im Vergleich mit Werten ihrer zweiten Ableitung.

Man findet für die Ableitungen: $f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2$

Die zweite Ableitung weist für alle $x \in \mathbb{R}$ den selben Wert auf. Der optische Eindruck der Normalparabel lässt jedoch keineswegs auf eine konstante Krümmung schließen; vielmehr scheint in der Nähe des Nullpunktes die Krümmung wesentlich stärker zu sein als für betragsgroße x.

Auf dem Weg zu einem Krümmungsbegriff, der sowohl die Richtung der Krümmung als auch deren Stärke berücksichtigt, beschäftigt man sich mit Kreisen, die man so an den Funktionsgraphen anpasst, dass sie an einer Stelle, an der man die Krümmung bestimmen will, "optimal anliegen"; solche Kreise nennt man Schmiegekreise an einen Funktionsgraphen. Der Grund ist, dass man über die Krümmung eines Kreises leicht anschaulich vernünftige Aussagen machen kann, denn je größer der Radius desto kleiner die Krümmung und umgekehrt. Wir gehen in der Herleitung von der allgemeinen Kreisgleichung aus, welche Punkte P(x / y) eines Kreises mit Radius r um den Kreismittelpunkt M (x_M / y_M) durch $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ beschreibt.



Schon die Graphik zeigt, dass der Versuch, die allgemeine Kreisgleichung nach y so aufzulösen, dass man eine Funktionsgleichung y = f(x) erhalten könnte, unmöglich ist, weil eine Funktionsgleichung einem x jeweils genau ein y zuordnen müsste, was offensichtlich nicht der Fall ist. Es gelingt aber je eine Funktionsgleichung für den oberen bzw. unteren Halbkreis anzugeben:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \Leftrightarrow (y - y_M)^2 = r^2 - (x - x_M)^2 \Leftrightarrow \left| y - y_M \right| = \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} \Leftrightarrow$$

$$y = y_M + \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} \quad \vee \quad y = y_M - \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2}$$

(oberer Halbkreis) (unterer Halbkreis)

In der allgemeinen Kreisgleichung steht y in Abhängigkeit von x entweder durch die Funktionsgleichung des oberen Halbkreises oder aber durch die Funktionsgleichung des unteren Halbkreises; gleich wie, wir bezeichnen die Funktionsgleichung des gerade in Frage kommenden Kreisabschnitts durch y = k(x).

Def: *(Implizite Funktionsgleichung des Kreises)*

Ist k die Funktion zur Beschreibung des oberen beziehungsweise unteren Halbkreises, dann ist die implizite Funktionsgleichung des Kreises gegeben durch $(x-x_M)^2 + (k(x)-y_M)^2 = r^2$

Der durch die implizite Kreisgleichung vorgegebene Kreis soll sich als Schmiegekreis "optimal" an den Graph einer Funktion f im Berührpunkt $B(x_B,f(x_B))$ anpassen; das heißt:

1. B ist gemeinsamer Punkt des Kreises und des Funktionsgraphen.
2. Der Graph der Kreisfunktion und der Funktionsgraph haben dieselbe Steigung in B.
3. Die Kreisfunktion und die Funktion f stimmen in B in dem uns bisher bekannten Krümmungsmaß, der 2. Ableitung, überein.

Damit diese Bedingungen rechnerisch ausschöpfbar werden, ist die zweifache Differenzierbarkeit der Funktion f in einer Umgebung der Stelle x_B nötig. In mathematischer Formulierung findet man für die drei postulierten Bedingungen:

1. $k(x_B) = f(x_B)$ 2. $k'(x_B) = f'(x_B)$ 3. $k''(x_B) = f''(x_B)$

Ziel der Rechnungen ist, daraus den Mittelpunkt $M(x_M/y_M)$ sowie den Radius r des Schmiegekreises zu bestimmen. Dazu betrachtet man dessen implizite Funktionsgleichung sowie deren erste und zweite Ableitung und erhält folgende Gleichungen:

i) $(x-x_M)^2 + (k(x)-y_M)^2 = r^2$ implizite Funktionsgleichung des Kreises

ii) $2(x-x_M) + 2(k(x)-y_M)\,k'(x) = 0 \Leftrightarrow$ deren 1. Ableitung
$x - x_M + (k(x) - y_M)\,k'(x) = 0$

iii) $2 + 2(k'(x_B))^2 + 2(k(x_B) - y_M)\,k''(x_B) = 0 \Leftrightarrow$ deren 2. Ableitung
$1 + (k'(x_B))^2 + (k(x_B) - y_M)\,k''(x_B) = 0$

Wendet man diese Gleichungen am Berührpunkt $B(x_B,f(x_B))$ des Schmiegekreises mit der Funktionsgleichung an, ergibt sich:

i) $(x_B-x_M)^2 + (k(x_B)-y_M)^2 = r^2$

ii) $x_B - x_M + (k(x_B) - y_M)\,k'(x_B) = 0$

iii) $1 + (k'(x_B))^2 + (k(x_B) - y_M)\,k''(x_B) = 0$

Durch Einsetzen der obigen Bedingungen 1. 2. und 3. erhält man daraus:

i) $(x_B-x_M)^2 + (f(x_B)-y_M)^2 = r^2$

ii) $x_B - x_M + (f(x_B) - y_M)\,f'(x_B) = 0$

iii) $1 + (f'(x_B))^2 + (f(x_B) - y_M)\,f''(x_B) = 0$

Die Gleichung iii) lässt sich - unter der Bedingung, dass $f''(x_B) \neq 0$ - nach y_M auflösen:

$$y_M = f(x_B) + \frac{1 + (f'(x_B))^2}{f''(x_B)}$$

Die Einsetzung diese Zwischenergebnisses in Gleichung ii) führt zur Ermittlung von x_M:

$$x_B - x_M + \left(f(x_B) - f(x_B) - \frac{1 + (f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \right) \cdot f'(x_B) = 0 \Leftrightarrow x_M = x_B - \frac{1 + (f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \cdot f'(x_B)$$

Schließlich ergibt sich nach Einsetzung von x_M und y_M in Gleichung i) der Radius r des Schmiegekreises.

$$\left(x_B - x_B + \frac{1+(f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \cdot f'(x_B) \right)^2 + \left(f(x_B) - f(x_B) - \frac{1+(f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \right)^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1+(f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \cdot f'(x_B) \right)^2 + \left(\frac{1+(f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \right)^2 = r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+(f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \right)^2 \cdot \left(1+(f'(x_B))^2\right) = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(1+(f'(x_B))^2\right)^3}{(f''(x_B))^2} = r^2 \Leftrightarrow r = \frac{\left(1+(f'(x_B))^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|(f''(x_B))\right|}$$

In der Zusammenfassung stellt man fest:

Satz: *(Schmiegekreis an einen Funktionsgraphen)*

Ist f eine an der Stelle x_B zweimal differenzierbare Funktion und ist $f''(x_B) \neq 0$, dann bestimmt man den Mittelpunkt $M(x_M / y_M)$ und den Radius r des Schmiegekreises an den Graphen von f im Punkt $(x_B / f(x_B))$ durch:

$$y_M = f(x_B) + \frac{1+(f'(x_B))^2}{f''(x_B)} \qquad x_M = x_B - f'(x_B)\,\frac{1+(f'(x_B))^2}{f''(x_B)}$$

$$r = \frac{(1+(f'(x_B))^2)^{\frac{3}{2}}}{\left|f''(x_B)\right|}$$

Beisp: *(Schmiegekreise an die Normalparabel)*

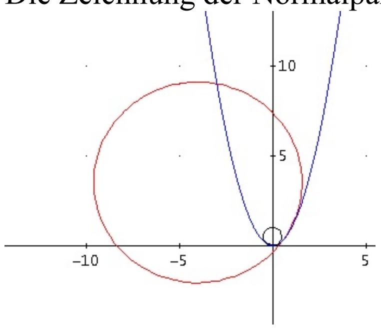
Bestimme die Schmiegekreise an die Normalparabel in den Punkten O(0/0) und P(1/1)!

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$ $\quad f''(x) = 2$

Im Punkt O(0/0) ist dann $x_M = 0$ und $y_M = \frac{1}{2}$, also $M\left(0 \,/\, \frac{1}{2}\right)$, außerdem $r = \frac{1}{2}$.

Im Punkt P(1/1) gilt: $x_M = -4$ und $y_M = \frac{7}{2}$, also $M\left(-4 \,/\, \frac{7}{2}\right)$, außerdem $r \approx 5{,}5902$.

Die Zeichnung der Normalparabel mit den beiden errechneten Schmiegekreisen:



Ein zugleich qualitatives wie auch quantitatives Krümmungsmaß

Um aus dem Rechenverfahren zur Ermittlung von Schmiegekreisen auch begrifflich profitieren zu können, definiert man, was man unter der Krümmung eines Kreises verstehen will. Die Definition berücksichtigt die anschauliche Feststellung, dass Kreise mit großem Radius wenig und Kreise mit kleinem Radius stark gekrümmt sind.

Def: *(Krümmung eines Kreises)*

Die Krümmung K eines Kreises mit Radius r wird gemessen durch $\boldsymbol{k} = \frac{1}{\boldsymbol{r}}$.

Mit Hilfe der Definition der Krümmung eines Kreises und der Kenntnis über das Anlegen von Schmiegekreisen definiert man, ohne den bei der Krümmungskreisermittlung bedeutsamen Fall $f''(x_B)=0$ erneut ausschließen zu müssen:

Def: *(Ein quantitatives Krümmungsmaß für Funktionsgraphen)*

Ist f eine an einer Stelle x_B zweimal differenzierbare Funktion, dann ist die Quantität $|K_f(x_B)|$ der Krümmung des Graphen von f an der Stelle x_B bestimmt durch:

$$|K_f(x_B)| = \frac{|f''(x_B)|}{(1+(f'(x_B))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Lässt man in der Definition des quantitativen Krümmungsmaßes einer Funktion f an einer Stelle x_B die Betragsstriche weg, findet man eine allgemeine Krümmungsdefinition für eine Funktion f an einer Stelle x_B, die sowohl die Stärke (Quantität) wie auch die Richtung (Qualität) der Krümmung berücksichtigt:

Def: *(Ein qualitatives und zugleich quantitatives Krümmungsmaß für Funktionsgraphen)*

Ist f eine an einer Stelle x_B zweimal differenzierbare Funktion, dann ist die Krümmung $K_f(x_B)$ des Graphen von f an der Stelle x_B quantitativ und zugleich qualitativ bestimmt durch:

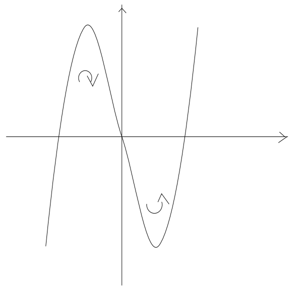
$$\kappa_f(x_B) = \frac{f''(x_B)}{(1+(f'(x_B))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Man erkennt:

- Der Betrag der Zahl $K_f(x_B)$ ist gleich dem Maß der quantitativen Krümmung der Funktion f an der Stelle x_B.
- Das Vorzeichen von $K_f(x_B)$ ist gleich dem Vorzeichen von $f''(x_B)$, gibt also, sofern $|K_f(x_B)| \neq 0$, nach dem Krümmungskriterium Auskunft über die Krümmungsrichtung.

5.5 Bestimmung relativer Extrema über das Krümmungskriterium, Bestimmung von Wendepunkten über das Kriterium der dritten Ableitung

Betrachtet man Kurven mit Hoch- und Tiefpunkten, dann fällt auf, dass an Hochpunkten Rechts- und an Tiefpunkten Linkskrümmung vorliegt.



Mit Hilfe dieser Erkenntnis ergibt sich für Kurven, die zu zweimal differenzierbaren Funktionen gehören, eine weitere Möglichkeit, relative Minimum- und Maximumstellen zu bestimmen; man kombiniert dabei das notwendige Extremstellenkriterium und das Krümmungskriterium zu einer
Methode:

Satz: *(Bestimmung relativer Extrema über das Krümmungskriterium)*

Ist f eine an der Stelle x_E zweimal differenzierbare Funktion mit $f'(x_E)=0$, dann ist x_E

- *relative Maximalstelle, wenn gilt $f''(x_E)<0$,*
- *relative Minimumstelle, wenn gilt $f''(x_E)>0$.*

Man erinnert sich, dass das Krümmungskriterium keine verbindliche Aussage über das Krümmungsverhalten der Funktion f an der Stelle x liefert, wenn $f''(x)=0$. Entsprechend ist auch die Bestimmung von Extremstellen x_E über das Krümmungskriterium nicht unmittelbar möglich, wenn an der Stelle x_E gilt $f''(x_E)=0$.

Beisp: *(Bestimmung relativer Extrema über das Krümmungskriterium)*

Bestimme relative Extrema der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$$

Für die erste und zweite Ableitung erhält man:

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 + x \qquad f''(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Zur Bestimmung von Extremstellen sucht man zunächst wie üblich Stellen mit waagerechter Tangente, also Kandidaten für Extremstellen:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Man untersucht das Krümmungsverhalten der Funktion f an den über die Ansatzgleichung gefundenen Stellen und findet:

für x=0: f´´(0) = 1 f weist also an der Stelle x=0 eine waagerechte Tangente bei gleichzeitiger Linkskrümmung auf, weil f´(0)=0 und f´´(0)>0. Damit ergibt sich dort der Tiefpunkt T(0/-1).

für x=1: f´´(-1)=0 Hier lässt sich über das Krümmungsverhalten nicht unmittelbar festlegen, ob an der Stelle x=1 ein Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt vorliegt.

Für die Stelle x=1 stellt man die Sachlage mit Hilfe des uns bereits bekannten Verfahrens der Vorzeichenuntersuchung der ersten Ableitung fest und findet:

x	0<x<1	1	x>1
f´(x)	>0	0	>0
Bemerkung		Sattelpunkt	

Auch Wendestellen einer Funktion f lassen sich häufig über ein vergleichbares Verfahren bestimmen, wenn man sich erinnert, dass Wendestellen als Extremstellen der Ableitungsfunktion f´ zu interpretieren sind. Man findet:

Satz: *(Bestimmung von Wendestellen über das Kriterium von der dritten Ableitung)*

Ist f eine an der Stelle x_W dreimal differenzierbare Funktion mit $f''(x_W)=0$, dann ist x_W Wendestelle, wenn $f''(x_W) \neq 0$.

5.6 Das Schema der Kurvendiskussion

Umfassende Untersuchungen zu Funktionskurven werden nach einem festen Schema durchgeführt; man nennt solche Untersuchungen Kurvendiskussionen. Die folgende Übersicht stellt die benötigten Verfahren in knapper Form zusammen.

	Untersuchungspunkt	Verfahren
1	Maximal möglicher Definitionsbereich D_{max}	D_{max} ist die Menge aller Zahlen x, für welche der Funktionsterm von f zulässig ist.
2	Einfache Symmetrien	Falls D_{max} nicht zu jedem x auch die Zahl -x enthält, liegen keine einfachen Symmetrien vor; die weiteren Untersuchungen zu diesem Punkt entfallen. Falls D_{max} zu jedem x auch die Zahl -x enthält, untersucht man den Term f(-x). - Ist f(-x) = f(x) für alle $x \in D_{max}$, ist f **symmetrisch zur y-Achse**. - Ist f(-x) =-f(x) für alle $x \in D_{max}$, ist f **symmetrisch zum Ursprung**. - In allen anderen Fällen liegen keine einfachen Symmetrien vor.
3	Ableitungen	Berechne f ', f '', eventuell f '''.
4	Nullstellen	Löse $f(x_N) = 0$, die Lösungen x_N sind die **Nullstellen** der Funktion f.
5	Extremalpunkte	- **Kandidaten** für Extremstellen x_E sind die Lösungen der Gleichung f'(x)=0. - Berechne zu jedem Kandidaten x_E den Funktionswert $f(x_E)$. Zur näheren Bestimmung der Kandidaten gibt es zwei alternative Verfahren: I **Bestimmung von Extremstellen über das Krümmungskriterium:** Falls $f''(x_E) < 0$, ist x_E Maximumstelle, H (x_E / $f(x_E)$) Hochpunkt. Falls $f''(x_E) > 0$, ist x_E Minimumstelle T (x_E / $f(x_E)$) Tiefpunkt. Falls $f''(x_E) = 0$, ist mit Verfahren I unmittelbar keine Entscheidung möglich, ob x_E Extremstelle ist oder nicht; man versucht dann in einem zweiten Anlauf den Ansatz über das Verfahren II. II **Bestimmung von Extremstellen über den Vorzeichenwechsel von f '** Falls f ' in der Umgebung von x_E das Vorzeichen von + nach - wechselt, ist x_E eine Maximumsstelle, (x_E / $f(x_E)$) Hochpunkt. Falls f ' in der Umgebung von x_E das Vorzeichen von - nach + wechselt, ist x_E eine Minimumstelle, (x_E / $f(x_E)$) Tiefpunkt.
6	Monotonieintervalle	- Ist für alle x aus dem Inneren eines Intervalls I das Vorzeichen von f'(x) positiv, dann ist f auf I **streng monoton steigend**. - Ist für alle x aus dem Inneren eines Intervalls I das Vorzeichen von f'(x) negativ, ist f auf I **streng monoton fallend**.
7	Wendepunkte	- **Kandidaten** für Wendestellen x_W sind die Lösungen der Gleichung f''(x)=0. - Berechne zu jedem Kandidaten x_W den Funktionswert $f(x_W)$. Zur näheren Bestimmung der Kandidaten gibt es zwei alternative Verfahren: I **Bestimmung von Wendestellen über die dritte Ableitung** Falls $f'''(x_W) \neq 0$, ist x_W Wendestelle, W (x_W / $f(x_W)$) Wendepunkt. Falls $f'''(x_W) = 0$, ist mit Verfahren I unmittelbar keine Entscheidung möglich, ob x_W Wendestelle ist oder nicht; man versucht dann in einem zweiten Anlauf den Ansatz über das Verfahren II. II **Bestimmung von Extremstellen über den Vorzeichenwechsel von f ''** Falls f'' in der Umgebung von x_W das Vorzeichen wechselt, ist x_W Wendestelle, (x_W / $f(x_W)$) Wendepunkt.
8	Krümmungsintervalle	- Ist für alle x aus dem Inneren eines Intervalls I das Vorzeichen von f''(x) positiv, dann ist f auf I l**inksgekrümmt**. - Ist für alle x aus dem Inneren eines Intervalls I das Vorzeichen von f'' (x) negativ, dann ist f auf I **rechtsgekrümmt**.
9	Grenzwerte	Es werden **Grenzwerte an allen Rändern** des Definitionsbereiches berechnet.
10	Zeichnung	Alle Ergebnisse werden in ein Koordinatensystem eingezeichnet; daraus ergibt sich der Graph von f.