4. Differentialrechnung

4.1 Die Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0

4.1.1 Die Definition der Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0

Def: *(Begriff der Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0, Version 1)*

Eine Funktion f heißt an einer Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

für $x \to x_0$ ermittelbar ist. In diesem Fall bezeichnet man

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Die Zahl $f'(x_0)$ heißt erste Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0.

Beisp: *(Untersuchung der Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0)*

Untersuche die Quadratfunktion an der Stelle $x_0 = 1$ auf Differenzierbarkeit! Gib die Steigung der Quadratfunktion an der Stelle $x_0 = 1$ an!

Wir setzen: $x_0 = 1$, $f(x) = x^2$, $f(x_0) = f(1) = 1$.

Damit ergibt sich für $x \neq 1$:

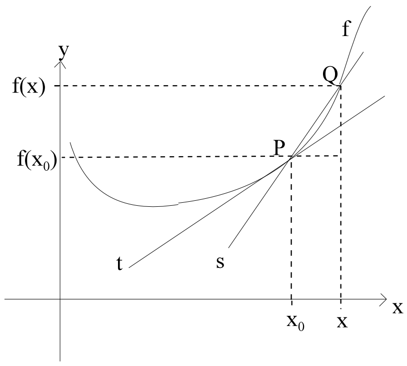
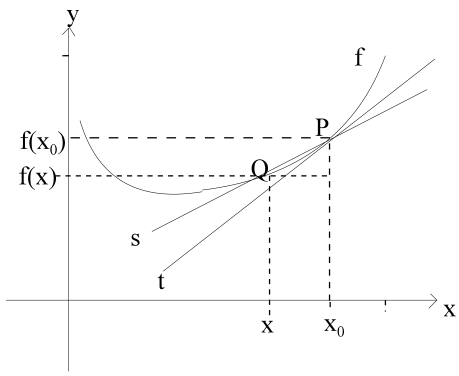
$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x - 1} = x + 1$$

Die in der Theorie schon vorbesprochene Grenzwertbildung liefert das gewünschte Ergebnis; es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} m_s = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2 = m_t = f'(1) = f'(x_0)$$

Damit ist die Differenzierbarkeit der Quadratfunktion an der Stelle $x_0 = 1$ nachgewiesen, weil sich der Grenzwert hat bilden lassen; außerdem ist die Steigung $f'(1)$ der Quadratfunktion an der Stelle $x_0 = 1$ durch den Wert 2 bestimmt.

Interpretiert man die Differenzierbarkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 graphisch unter dem Gesichtspunkt einseitiger Grenzwerte, dann findet man zwei Darstellungen, einmal für $x>x_0$, zum anderen für $x<x_0$. Die Gegenüberstellung der beiden Fälle

$x>x_0$	$x<x_0$
	
$m_s = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	$m_s = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \dfrac{(-1) \cdot (f(x_0) - f(x))}{(-1) \cdot (x_0 - x)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Im Fall $x>x_0$ liest man aus der Zeichnung genau wie vorher für die Sekantensteigung ab; im Endergebnis ergibt sich im Fall $x<x_0$ kein Unterschied.

Unter Verwendung einseitiger Grenzwerte findet man das folgende Differenzierbarkeitskriterium:

Satz: *(Begriff der Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0, Version 2)*

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, falls die einseitigen Grenzwerte des Differenzenquotienten für $x \to x_0$ jeweils ermittelbar und beide gleich sind.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Beisp: *(Untersuchung von Funktionen auf Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0)*

Gegeben sind die Funktionen g und h durch ihre Gleichungen:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x>-1 \\ x+3 & x \le -1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x>-1 \\ -2x & x \le -1 \end{cases}$$

Wir untersuchen diese Funktionen jeweils auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0=-1$.

Der rechtsseitige Grenzwert des Differenzenquotienten von g an der Stelle $x_0=-1$ errechnet sich durch:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} m_s = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^2+1-2}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^2-1}{x+1} =$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x-1 = -2$$

Durch die nun folgende Berechnung des linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten von g an der Stelle x_0=-1 ergibt sich, dass g dort nicht differenzierbar ist, weil der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten nicht mit dem rechtsseitigen übereinstimmt:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{x+3-2}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{x+1}{x+1} = 1 \neq -2$$

Es ist also nicht sinnvoll, dem Graph der Funktion g eine Steigung an der Stelle x_0=-1 zuzubilligen.

h ist an der Stelle x_0=-1 differenzierbar, denn

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^2+1-2}{x-(-1)} = -2$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-2x-2}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{-2\,(x+1)}{x+1} = -2$$

Die Steigung des Graphen von h an der Stelle x_0=-1 beträgt also -2.

Setzt man in der Definition der Differenzierbarkeit für x-x_0 die Zahl Δx als Symbol des Unterschiedes von x und x_0 ein, setzt also Δx = x-x_0, und ersetzt man dementsprechend die Variable x durch x_0 + Δx, dann ergibt sich ein zur obigen Definition verwandter Begriff der Differenzierbarkeit. Die Annäherung $x \to x_0$ ist dann durch $\Delta x \to 0$ zu ersetzen.

Satz: *(Begriff der Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0, Version 3)*

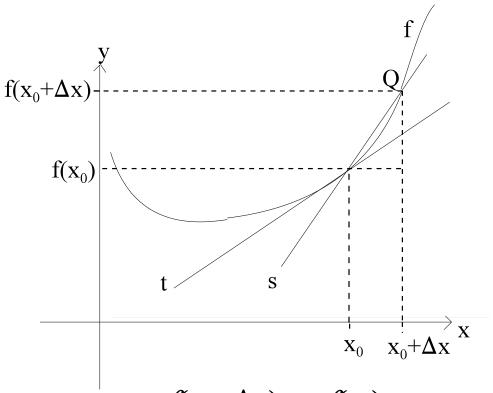
Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert des Quotienten

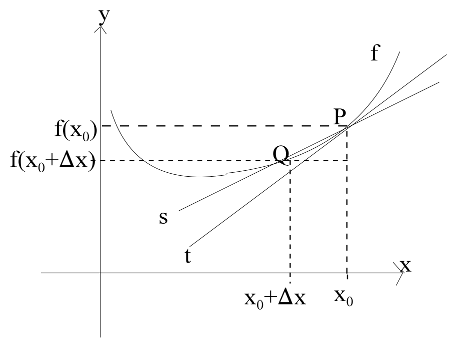
$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

für $\Delta x \to 0$ ermittelbar ist. Falls dieser Grenzwert ermittelt werden kann, gilt:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Die folgenden erklärenden Zeichnungen sind oben bereits gezeigt worden; man vergleicht die geänderte Beschriftung. Dem in der linken Zeichnung gezeigten früheren Fall $x_0 < x$ entspricht jetzt $\Delta x > 0$, rechts wird analog dem früheren Fall $x_0 > x$ der Sachverhalt für $\Delta x < 0$ illustriert.

<table>
<tr><th>Δx > 0</th><th>Δx < 0</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td>

$$m_s = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

</td><td>

$$m_s = \frac{f(x_0) - f(x_0+\Delta x)}{-\Delta x} = \frac{(-1)\cdot(\,f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\,)}{-\Delta x} =$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

</td></tr>
</table>

Der geänderten Sichtweise entsprechende Rechenwege werden im nächsten Beispiel gezeigt:

Beisp: *(Überprüfung einer Funktion auf Differenzierbarkeit)*

Überprüfe die Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = \begin{cases} (x-4)^2+1 & x>4 \\ x-3 & x\leq 4 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0=4$ auf Differenzierbarkeit!

Die Differenzierbarkeit von f an der Stelle $x_0=1$ kann direkt untersucht werden; die Untersuchung der Differenzierbarkeit von g an der Stelle $x_0=1$ erfordert den Weg über einseitige Grenzwerte.

Man rechnet für f unter Zuhilfenahme einer geschickten Erweiterung:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - 2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{4 + \Delta x} - 2)\cdot(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)}{\Delta x\cdot(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{\Delta x\cdot(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{4 + \Delta x} + 2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{4 + \Delta x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4} = f'(x_0)$$

Die Untersuchung der Funktion g liefert:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{4 + \Delta x - 3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{(4 + \Delta x - 4)^2 + 1 - 1}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \Delta x = 0$$

Also ist g an der Stelle $x_0=1$ nicht differenzierbar, weil die rechtsseitige Grenzwertuntersuchung des Differenzenquotienten nicht das gleiche Ergebnis wie die linksseitige erbracht hat.

Zu einem weiteren Differenzierbarkeitsbegriff gelangt man, wenn man unter der Annahme, dass f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, den numerischen Unterschied zwischen Werten des Differenzenquotienten und Werten der ersten Ableitung von f an der Stelle x_0 in Werten einer Funktion R beschreibt. In Formeln:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + R(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + R(x)) \cdot (x - x_0)$$

> **Satz**: *(Begriff der Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0, Version 4)*
>
> *Eine Funktion f ist differenzierbar an der Stelle x_0,, wenn es eine Zahl A und eine Funktion R gibt mit* $f(x) - f(x_0) = (A + R(x)) \cdot (x - x_0)$*, wobei für R gilt:*
>
> $$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$$
>
> *Dann gilt:* $A = f'(x_0)$

4.1.2 Zusammenhang der Eigenschaften "Stetigkeit" und "Differenzierbarkeit" an einer Stelle x_0

> **Satz**: *(Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0)*
>
> *a) Jede an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig. Die Differenzierbarkeit ist eine hinreichende Bedingung für Stetigkeit*
>
> *b) Nicht jede an einer Stelle x_0 stetige Funktion ist dort auch differenzierbar.*
>
> *c) Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 nicht stetig, dann ist sie dort auch nicht differenzierbar. Die Stetigkeit ist eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit*

Bew: Satz a):

Voraussetzung: f differenzierbar an der Stelle x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Behauptung: f stetig an der Stelle x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Wir formen die Behauptung mit Hilfe der Voraussetzung so lange um, bis wir zweifelsfrei deren Wahrheitsgehalt erkennen:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Satz b):

Hier genügt die Angabe des Beispiels einer Funktion, die an einer Stelle x_0 stetig, aber nicht differenzierbar ist. Ein solches Beispiel finden wir in der Betragsfunktion f an der Stelle x_0=0. Deren Gleichung ist gegeben durch:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

f ist stetig an der Stelle x_0 = 0, denn

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -x = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0 = f(0)$$

f ist nicht differenzierbar an der Stelle x_0 = 0, denn der Grenzwert des Differenzenquotienten ist nicht ermittelbar, weil:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-x-0}{x} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x-0}{x} = 1$$

Satz c):

Diese Aussage ist äquivalent zu der unter a), denn im allgemeinen ist der Wahrheitsgehalt der Implikation “A⇒B” zweier Aussagen A und B gleich dem Wahrheitsgehalt der Implikation “nicht B ⇒ nicht A”, wie wir im einführenden Methodenkapitel gesehen haben. Hier setzt man für A “f ist differenzierbar an der Stelle x_0" und für B ”f ist stetig an der Stelle x_0".

4.1.3 Differenzierbare Funktionen

Def: *(Differenzierbare Funktion, Ableitungsfunktion)*

Eine Funktion f: D→ℝ, die an jeder Stelle von D differenzierbar ist, heißt eine differenzierbare Funktion. Diejenige Funktion f :D→ℝ , die jedem x∈D f (x) zuordnet, heißt Ableitungsfunktion von f.

Aus unseren Ergebnissen über den Zusammenhang zwischen “Stetigkeit an einer Stelle x_0” und “Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0" ersehen wir sofort den Zusammenhang zwischen stetigen und differenzierbaren Funktionen:

Satz: *(Zusammenhang zwischen stetigen und differenzierbaren Funktionen)*

a) Eine differenzierbare Funktion f ist stetig.

b) Nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.

d) Eine nicht stetige Funktion f ist auch nicht differenzierbar.

Mit den Mitteln der Mengenlehre ausgedrückt formuliert man:

Die Menge der stetigen Funktionen umfasst die Menge der differenzierbaren Funktionen. Das heißt: Die Menge der differenzierbaren Funktionen ist Teilmenge der Menge der stetigen Funktionen.

Da der Graph einer stetigen Funktion durchzeichenbar ist, ist also auch der Graph einer differenzierbaren Funktion durchzeichenbar; der ergänzende Unterschied ist:

Graphen differenzierbarer Funktionen sind durchzeichenbar ohne Ecken und ohne senkrechte Tangenten.

4.2 Die Berechnung der Ableitung verschiedener Funktionen

In diesem und den folgenden Abschnitten geht es darum, sich von dem schwerfälligen durch die Definition vorgegebenen Mechanismus der Bestimmung von Ableitungen zu lösen und Formeln zu finden, mit deren Hilfe sich die Ableitungen leichter bestimmen lassen. Aus dem Unterricht des Vorjahres schon bekannt sind die Ableitungen verschiedener Potenzfunktionen:

f(x)	f´(x$_0$)	f(x)	f´(x$_0$)
mx + b	m	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x_0^2}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$n \cdot x_0^{n-1}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Wir ergänzen weiter:

4.2.1 Die Ableitung der Sinus- und Cosinus-Funktion

Die Ableitungen der Sinus- und der Cosinus-Funktion an einer bestimmten Stelle x_0 sind nicht einfach zu bestimmen, weil viel Hintergrundwissen in den Beweis mit einfließt. Die wichtigsten der dabei benötigten Formeln werden der eigentlichen Herleitung der Ableitung - teils ohne Beweis - vorangestellt.

Satz: *(Additionstheoreme für sin und cos)*

Es gilt:

sin (a+b) = sin (a) cos (b) + cos (a) sin (b) für alle a, b $\in \mathbb{R}$

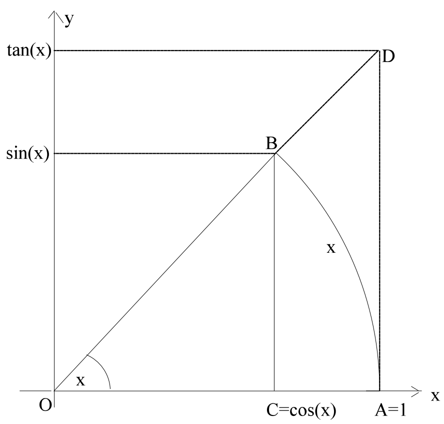
cos (a+b) = cos (a) cos (b) - sin (a) sin (b) für alle a, b $\in \mathbb{R}$

Die nächsten beiden Hilfssätze beinhalten die Berechnung zweier oft und auch hier benötigter Grenzwerte.

Satz: *(Ein Grenzwert in Zusammenhang mit der Sinus-Funktion)*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Bew: In anschaulicher Argumentation richtet sich der Beweis nach der folgenden Skizze.



x bezeichnet den Winkel COB im Bogenmaß am Kreis mit r = 1; der entsprechende Kreisbogen von A nach B ist deshalb mit x bezeichnet. Folgende Streckenlängen sind besonders hervorgehoben:

$$\left|\overline{OC}\right| = \cos(x) \quad \left|\overline{CB}\right| = \sin(x) \quad \left|\overline{AD}\right| = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Die Zeichnung legt folgenden Flächenmaßvergleich nahe:

| Dreieck OCB | < | Kreissektor OAB | < | Dreieck OAD |

In Abhängigkeit vom Winkel x ergibt sich für die betrachteten Flächenmaße:

$$|\,Dreieck\ \ OCB\,| = \frac{1}{2}\ Grundseite \cdot Höhe = \frac{1}{2}\cos(x)\cdot\sin(x)$$

Die Fläche des betrachteten Kreissektors errechnet sich als Teil des Gesamtkreises, dessen Fläche A_{kreis} nach der Formel $A_{kreis} = r^2\cdot\pi$ ermittelt wird. Da r = 1, finden wir hier $A_{kreis} = \pi$. Der Winkel, der den Vollkreis überstreicht, hat das Bogenmaß 2π. Ein Kreissektor am Einheitskreis, der durch einen Winkel vom Bogenmaß 1 überstrichen wird, weist entsprechend ein Flächenmaß auf, welches dem 2π-ten Teil des Flächenmaßes des Gesamtkreises entspricht. Ein Kreissektor am Einheitskreis, der durch einen Winkel vom Bogenmaß x überstrichen wird, weist ein Flächenmaß auf, welches x-fachen der Fläche des Sektors entspricht, der vom Winkel mit dem Bogen 1 überstrichen wird. Also:

$$|\,Kreissektor\ \ OAB\,| = \frac{\pi}{2\pi}\cdot x = \frac{1}{2}\,x$$

Für das Dreieck OAD ergibt sich schließlich:

$$|\,Dreieck\ \ OAD\,| = \frac{1}{2}\ Grundseite \cdot Höhe = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\ (x)}{\cos(x)}$$

Die oben schon beschriebene Reihenfolge nach der Größenordnung der betrachteten Flächen wird nun dargestellt durch:

$$\frac{1}{2}\cos(x)\cdot\sin(x) < \frac{1}{2}\,x < \frac{1}{2}\,\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Multipliziert man diese Ungleichungskette mit 2 und dividiert durch sin(x), ergibt sich, wenn x und damit sin (x)>0 angenommen werden:

$$\cos(x) < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Bildet man in der Ungleichungskette jeweils den Kehrwert der Terme, ändert sich die Reihenfolge der Größenordnung; man findet:

$$\frac{1}{\cos(x)} > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$$

Bildet man in dieser Situation die Grenzwerte für $x\to 0$, ergibt sich:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\cos(x)} \geq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{x} \geq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(x)}{x} \geq 1$$

Also ist: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Für einen Winkel mit Bogenmaß x<0 ergibt sich dasselbe Ergebnis der Betrachtungen.

Satz: *(Ein Grenzwert in Zusammenhang mit der Cosinus-Funktion)*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

Bew: Unter Verwendung der für alle x gültigen Formel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und der Additionstheoreme formen wir um:

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} =$$

$$\frac{1-\left(1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} =$$

$$\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \sin(x)$$

Der gewünschte Grenzwert ergibt sich nun unter Ausnutzung des im vorhergehenden Satz schon bewiesenen Grenzwertes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \sin(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \sin(x) = 1 \cdot 0 = 0$$

Satz: *(Die Ableitung der Sinus-Funktion)*

Ist f(x)=sin(x), dann berechnet f (x_0) durch f (x_0) = cos (x_0)

Bew: Unter Verwendung der Hilfssätze findet man:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x_0)\cos(\Delta x) + \cos(x_0)\sin(\Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x_0)\ \cos(\Delta x)\ -\ \sin(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x_0)\ \sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \sin(x_0) \frac{\cos(\Delta x)\ -\ 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \cos(x_0) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\sin(x_0) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(\Delta x)\ -\ 1}{\Delta x} + \cos(x_0) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\sin(x_0) \cdot 0 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0)$$

Satz: *(Die Ableitung der Cosinus-Funktion)*

Ist $f(x)=\cos(x)$, dann berechnet man die Ableitung $f'(x_0)$ durch $f'(x_0) = -\sin(x_0)$

Bew: Unter Verwendung der Hilfssätze findet man:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x_0+\Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x_0)\cos(\Delta x) - \sin(x_0)\sin(\Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x_0)\ \cos(\Delta x)\ -\ \cos(x_0)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x_0)\ \sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \cos(x_0) \frac{\cos(\Delta x)\ -\ 1}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} \sin(x_0) \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\cos(x_0) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(\Delta x)\ -\ 1}{\Delta x} - \sin(x_0) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$\cos(x_0) \cdot 0 - \sin(x_0) \cdot 1 = -\sin(x_0)$$

4.2.2 Die Rechenregeln der Differentialrechnung

Auf der Basis der Tabelle zur Bestimmung von Ableitungen kann man zahlreiche weitere Ableitungen bestimmen, wenn man geeignete Ableitungs-Rechenregeln für per Addition, Multiplikation, Division oder Hintereinanderausführung verknüpfte Funktionen der Tabelle beherrscht.

Satz: *(Summenregel der Differentialrechnung)*

Sind zwei auf einer Menge D differenzierbare Funktionen f und g gegeben, dann ist auch deren Summenfunktion h=f+g auf D differenzierbar, und es gilt:

$h'(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Bew: Für beliebige Stellen $x_0 \in D$ gilt:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Also ist $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Satz: *(Faktorregel der Differentialrechnung)*

Ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und eine auf einer Menge D differenzierbare Funktion f gegeben, dann ist auch die Funktion $h=c\cdot f$ auf D differenzierbar, und es gilt: $h'(x) = (c\cdot f)'(x) = c\cdot f'(x)$

Bew: $$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c\cdot f(x)-c\cdot f(x_0)}{x-x_0} = c \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c \cdot f'(x_0)$$

Beisp: *(Summen- und Faktorregel)*

Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x)= x^2 - 4 \sin(x)$!

Der Funktionsterm besteht aus einer Summe der beiden Terme "x^2" und "$- 4 \sin(x)$". Man wendet also die Summenregel an:

$f'(x) = (x^2)' + (-4\sin(x))'$

Die Ableitung des Terms "x^2" erfolgt nach der Tabelle; auf den Term "$- 4 \sin(x)$" wendet man die Faktorregel an. Es ergibt sich:

$f'(x) = 2x + (-4) \cdot (\sin(x))'$

Die Ableitungsfunktion der sin-Funktion findet sich in der Tabelle; also gilt:

$f'(x) = 2x + (-4) \cdot \cos(x) = 2x - 4\cos(x)$

So einfach wie die Summe zweier Funktionen kann man ein Produkt zweier Funktionen nicht ableiten:

Beisp: *(Notwendigkeit der Produktregel)*

Die Ableitung des Produktes h mit $h(x) =x^3$ aus den Funktionen f und g mit $f(x)=x$ und $g(x) = x^2$ ist nicht gleich dem Produkt der Ableitungen der beiden Funktionen.

$f'(x) = 1$ $\quad g'(x) = 2x$ $\quad h'(x) = 3x^2$ $\quad$ Also ist: $h'(x) = (f \cdot g)'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$

Satz: *(Produktregel der Differentialrechnung)*

Sind zwei auf einer Menge D differenzierbare Funktionen f und g gegeben, dann ist auch deren Produktfunktion h = f · g auf D differenzierbar, und es gilt:

$h'(x) = (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

Bew: Man bestimmt die Ableitung von h an irgendeiner Stelle $x_0 \in D$. Deren Herleitung arbeitet mit der geschickten Einfügung einer 0 (im letzten Term der ersten Zeile).

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)\cdot g(x) \;\; -f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x) \;\; -f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} = g(x)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} g(x) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$g(x_0)\cdot f'(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Also ist $h'(x) = (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$.

Beisp: *(Produktregel)*

Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion h mit $h(x) = x^2 \cdot \sin(x)$.

Der abzuleitende Funktionsterm von h ist ein Produkt der Funktionsterme von f und g mit $f(x)=x^2$ sowie $g(x) = \sin(x)$; folglich wendet man die Produktregel an und findet:

$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) = (x^2)' \cdot \sin(x) + x^2 \cdot (\sin(x))' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

Satz: *(Kehrwertregel der Differentialrechnung)*

Ist eine auf einer Menge D differenzierbare Funktion f gegeben, und ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch die Kehrwertfunktion h = 1/f auf D differenzierbar, und es gilt:

$$h'(x) = \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$$

Bew: Für beliebiges $x_0 \in D$ gilt:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)\cdot f(x_0)\cdot(x-x_0)} =$$

$$-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)} \quad\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = -\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)\cdot f(x_0)} = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

Also gilt die behauptete Kehrwertregel.

Mit Hilfe der Kehrwertregel lässt sich die Ableitung der Potenzfunktion nicht nur - wie bisher - für positive sondern auch für negative ganzzahlige Exponenten bestimmen. Das Ergebnis verallgemeinert die schon gefundene Ableitung der Potenzfunktion mit ganzzahligem positivem Exponenten.

Satz: *(Ableitung der Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten)*

Eine Potenzfunktion f mit ganzzahligem Exponenten z hat die Gleichung $f(x) = x^z$. Ihre Ableitungsfunktion f′ hat die Gleichung $f'(x) = z\,x^{z-1}$

Bew: Für positive ganze Zahlen z ist der Beweis bereits früher geführt. Ist z=0, gilt $f(x) = x^0 = 1$ und die Ableitung erfüllt die gewünschte Formel; denn:

$f'(x) = (1)' = 0 = 0\cdot x^{0-1}$

Ist eine ganze Zahl mit z<0 und n die positive Gegenzahl von z mit z=-n, finden wir:

$$f'(x) = (x^z)' = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}} =$$

$$-n\,x^{n-1-2n} = -n\,x^{-n-1} = z\,x^{z-1}$$

Mit Hilfe der Kehrwertregel wird auch der Beweis der allgemeineren Quotientenregel geführt:

Satz: *(Quotientenregel der Differentialrechnung)*

Sind zwei auf einer Menge D differenzierbare Funktionen f und g gegeben, und ist $g(x)\neq 0$ für alle $x\in D$, dann ist auch die Quotientenfunktion h = f/g auf D differenzierbar, und es gilt:

$$h'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}$$

Bew: Unter Verwendung der Produkt- und der Kehrwertregel findet man:

$$h'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$\frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Beisp: *(Ableitung der Tangens-Funktion)*

Bestimme die Ableitung der Tangens-Funktion mit der Gleichung $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Mit der Quotientenregel und unter Zuhilfenahme der Tabelle findet man:

$$tan'(x) = \frac{sin'(x) \cdot \cos(x) - cos'(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Dieses Ergebnis kann man durch Anwendung der Formel $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ (für beliebige x) weiter straffen oder durch Auseinanderziehen des Bruches so verrechnen, dass die Ableitung in Abhängigkeit von tan (x) formuliert werden kann:

$$tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Zur Herleitung der Kettenregel der Differentialrechnung, der Rechenregel für die Ableitung der Hintereinanderausführung zweier Funktionen, wählen wir zunächst ein einführendes Beispiel:

Beisp: *(Die Ableitung der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=sin^n(x)$)*

Bestimme die Ableitungen der Funktionen

$f_2(x)=\sin^2(x)$ $f_3(x)=\sin^3(x)$ $f_4(x)=\sin^4(x)$!

Verallgemeinere das Ergebnis für $f_n(x)=\sin^n(x)$ ($n\in\mathbb{N}$)!

Wir rechnen nach der Produktregel:

$f_2'(x) = (\sin(x) \cdot \sin(x))' = \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

$f_3'(x) = (\sin(x) \cdot \sin^2(x))' = \cos(x) \cdot \sin^2(x) + \sin(x) \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = 3 \sin^2(x) \cos(x)$

$f_4'(x)=(\sin^2(x) \cdot \sin^2(x))'=2 \sin(x) \cos(x) \cdot \sin^2(x)+2 \sin(x) \cos(x) \cdot \sin^2(x)=4 \sin^3(x) \cos(x)$

Die noch endgültig mit vollständiger Induktion zu beweisende Verallgemeinerung liefert:
$f_n'(x) = n \sin^{n-1}(x) \cos(x)$

Analysiert man das Ergebnis dieses Beispiels näher, so entdeckt man, dass die Funktion f_n Hintereinanderausführung der Funktionen f und g mit den Gleichungen f(x) = sin (x) und g (x) = x^n ist; es gilt also $f_n(x) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$. Auch die Ableitungen der beiden Funktionen f und g treten offensichtlich in der gefundenen Formel auf , denn $f'(x)=\cos(x)$ und $g'(x) = n \cdot x^{n-1}$. Der Zusammenhang ist:

$$f_n'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = (g'\circ f)(x) \cdot f'(x)$$

Die im Beispiel gefundene Verallgemeinerung ist allgemeingültig:

> **Satz**: *(Kettenregel der Differentialrechnung)*
>
> *Ist f eine auf einer Menge D differenzierbare Funktion, ist außerdem g eine Funktion, die auf dem Bild von D unter f differenzierbar ist, dann ist auch die Hintereinanderausführung h=g∘f auf D differenzierbar, und es gilt:*
>
> $h'(x) = (g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = (g'\circ f)(x) \cdot f'(x)$

Bew: Auf den ersten Blick scheint eine Beweisidee durch Erweitern schnell gefunden:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0}$$

Also:

$$h'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Tatsächlich funktioniert diese Beweisidee dann, aber auch nur dann, wenn $f(x) - f(x_0) \neq 0$ in der Nähe von x_0, also nur, wenn f den Wert $f(x_0)$ nur einmal im Intervall $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ annimmt, weil dann unerwünschte Divisionen durch die Zahl 0 vermieden sind. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn f in der Nähe von x_0 streng monoton steigt oder fällt. Aber auch sonst gilt die Kettenregel, denn:

Wir verwenden dazu den weiter oben genannten Satz (Version 4 der Definitionen zur Differenzierbarkeit) und formulieren: f ist an einer Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, genau dann, wenn es eine Funktion R_1 mit den genannten Eigenschaften gibt, also wenn

$f(x) - f(x_0) = (A + R_1(x)) \cdot (x - x_0)$ A ist gleichbedeutend mit $f'(x_0)$.

g ist an der Stelle $f(x_0) \in$ Bild (f) differenzierbar, wenn es eine Funktion R_2 gibt mit

$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (B + R_2(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))$ B ist gleichbedeutend mit $g'(f(x_0))$.

Damit erhält man:

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{(B + R_2(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))}{x-x_0} =$$

$$\frac{(B + R_2(x)) \cdot (A + R_1(x)) \cdot (x - x_0)}{x-x_0} = (B + R_2(x)) \cdot (A + R_1(x)) =$$

$$B \cdot A + B \cdot R_1(x) + R_2(x) \cdot A + R_2(x) \cdot R_1(x)$$

Da R_1 und R_2 beide für $x \to x_0$ gegen 0 streben, findet man also

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = B \cdot A = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Beisp: *(Ableitungen nach der Kettenregel)*

Leite ab! $h_1(x) = (x^2+1)^7$ $h_2(x) = \sin(x^3)$ $h_3(x) = \sqrt{\tan(x)}$

Die äußere Funktion der Hintereinanderausführung h_1 ist g_1 mit $g_1(x) = x^7$ und $g_1'(x) = 7x^6$; die innere Funktion f_1 hat die Gleichung $f_1(x) = x^2+1$ und die Ableitung $f_1'(x)= 2x$. Damit ergibt sich:

$h_1'(x) = g_1'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = 7\,(f_1(x))^6 \cdot f_1'(x) = 7\,(x^2+1)^6 \cdot 2x$

Die äußere Funktion der Hintereinanderausführung h_2 ist g_2 mit der Gleichung $g_2(x) = \sin(x)$ und $g_2'(x) = \cos(x)$; die innere Funktion f_2 hat die Gleichung $f_2(x) = x^3$ und die Ableitung $f_2'(x)= 3x^2$.

$h_2'(x) = g_2'(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \cos(f_2(x)) \cdot f_2'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

In ähnlicher Weise ergibt sich die Ableitung h_3'; das Ergebnis ist:

$$h_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\tan(x)}} \cdot \tan'(x) = \frac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}$$

Mit Hilfe der Kettenregel kann man die Ableitungsregel für Potenzfunktionen weiter verallgemeinern.

Satz: *(Ableitung der Potenzfunktion mit rationalem Exponenten)*

Eine Potenzfunktion f mit rationalem Exponenten q hat die Gleichung $f(x) = x^q$, wobei q als Quotient einer ganzen Zahl z und einer natürlichen Zahl n darstellbar ist.

Ihre Ableitungsfunktion f′ hat die Gleichung $f'(x) = q\,x^{q-1}$

Bew: Der Beweis stützt sich auf die Annahme, dass w differenzierbar ist. Er wird in zwei Schritte geteilt; zunächst untersuchen wir die Ableitung der n-ten Wurzelfunktion w mit der Gleichung:

$$w(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Es gilt einerseits: $(w^n(x))' = \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)' = x' = 1$

Andererseits ermittelt man nach der Kettenregel:

$$(w^n(x))' = n\, w^{n-1}(x) \cdot w'(x) = n \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \cdot w'(x) = n\, x^{\frac{n-1}{n}} \cdot w'(x)$$

Der Vergleich der beiden Betrachtungsweisen liefert eine Formel zur Berechnung des Terms der Ableitungsfunktion zur n-ten Wurzelfunktion; frühere Ergebnisse zur Ableitung der Potenzfunktion werden dadurch bestätigt und verallgemeinert:

$$1 = n\, x^{\frac{n-1}{n}} \cdot w'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{n} = x^{\frac{n-1}{n}} \cdot w'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = w'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = w'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = w'(x)$$

Im zweiten Schritt des Beweises leitet man nun - unter Zuhilfenahme des Ergebnisses aus dem ersten Schritt und der Kettenregel - die Potenzfunktion mit rationalem Exponenten ab und findet ein vertrautes Ergebnis:

$$f'(x) = (x^q)' = \left(x^{\frac{z}{n}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^z\right)' = z \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{z-1} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' =$$

$$z\, x^{\frac{z-1}{n}} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{z}{n} x^{\frac{z-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{z}{n} x^{\frac{z-1+1}{n}-1} = \frac{z}{n} x^{\frac{z}{n}-1} = q\, x^{q-1}$$

Die nun für alle rationalen Exponenten bestätigte Formel zur Berechnung der Ableitung der Potenzfunktion gilt auch für reelle nichtrationale Exponenten. Der Nachweis unterbleibt hier aber.

4.3 Lineare Approximation

Oft ist es nützlich, Funktionen, die man nicht genau überschaut oder überschauen kann, durch vergleichsweise einfache mit ausreichender Genauigkeit darstellen zu können. Eine einfache Möglichkeit dazu bietet die Näherung (Approximation) durch lineare Funktionen.

Diejenige lineare Funktion g: y = mx + n, welche mit dem Graph einer beliebigen differenzierbaren Funktion f in der Nähe eines Punktes P(x_0 / $f(x_0)$) “möglichst gut” übereinstimmt, soll zwei Eigenschaften aufweisen: Einmal haben die Graphen von f und g den Punkt P gemeinsam, zum zweiten stimmen sie dort in der Steigung überein. Also muss gelten: 1. $f(x_0) = g(x_0)$ 2. $f'(x_0) = g'(x_0)$

Aus der Forderung 2. ergibt sich $m = f'(x_0)$, also g: $y = f'(x_0)\, x + n$. Dort die Forderung 1. eingesetzt führt zur Bestimmung von n:

$$f(x_0) = g(x_0) = f'(x_0)\, x_0 + n \quad \Leftrightarrow \quad n = f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$$

Die mit f bei P möglichst gut übereinstimmende lineare Funktion g hat damit die Gleichung
g: $y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$

In übersichtlicher Schreibweise angeordnet notiert man äquivalent:

g: $y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$ oder g: $y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$

Def: *(Lineare Approximation)*

f sei eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion. Dann heißt die Funktion g mit g: $y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$ lineare Approximation der Funktion f an der Stelle x_0.

Das folgende Beispiel zeigt, wie man sich lineare Approximationsfunktionen zunutze machen kann, um Zusammenhänge darzustellen.

Beisp: *(Lineare Approximation der sinus-Funktion, Berechnung der Kurvenlänge und Fläche)*

Bestimme jeweils die lineare Approximation der Sinus-Funktion an den Stellen

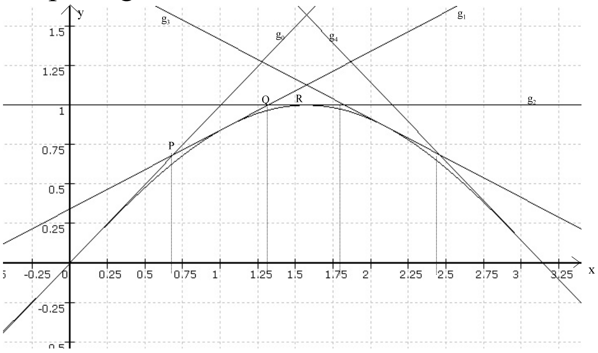
$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{3},\ \ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \frac{2\pi}{3},\ x_4 = \pi$. Zeichne!

Leite anhand der Graphik einen sinnvollen Schätzwert für die Länge des Bogens der sin-Funktion über dem Intervall $[0, \pi]$ her!

Anhand der Tabelle ergeben sich die gesuchten linearen Approximationsfunktionen g_0 bis g_4:

i	x_i	$f(x_i) = \sin(x_i)$	$f'(x_i) = \cos(x_i)$	$g_i(x)$
0	0	0	1	$y = 0 + 1\,(x-0) \iff y = x$
1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$
2	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$y = 1 + 0 \iff y = 1$
3	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$y = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$
4	π	0	-1	$y = 0 - 1\,(x - \pi) \iff y = -x + \pi$

Die Zeichnung stellt die sin-Kurve zusammen mit den Graphen der Approximationsfunktionen dar und zeigt, dass tatsächlich eine enge Näherung möglich wird, wenn man die sich ergebenden Graphen geschickt einsetzt.



In der Zeichnung sind Intervalle verdeutlicht, wo die einzelnen Approximationsgraphen gelten sollen. Weiter erkennt man, dass die gesamte Anordnung symmetrisch zur Gerade mit der Gleichung $x = \frac{\pi}{2}$ gelagert ist, wodurch man nur von x=0 bis $x=\frac{\pi}{2}$ untersuchen muss und die sich ergebenden Maße daran anschließend einfach verdoppeln kann. Für diese Rechnung werden die Koordinaten der angedeuteten Punkte P, Q und R benötigt.

$P = g_0 \cap g_1$: $\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \;/\; \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ $\qquad$ $Q = g_1 \cap g_2$: $\left(2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \;/\; 1\right)$

$R = g_2 \cap g_3 = \left(\frac{\pi}{2} \;/\; 1\right)$

Auf vier Stellen gerundet ergeben sich folgende Koordinaten:

P (0,6849 / 0,6849) $\qquad$ Q(1,3151 / 1) $\qquad$ R(1,5708 / 1)

Die Bogenlänge B der Sinusfunktion errechnet sich dann über dem Intervall [0/π] angenähert durch:

$$2\left(\left|\overline{OP}\right| + \left|\overline{PQ}\right| + \left|\overline{QR}\right|\right) =$$

$$2\left(\sqrt{0{,}6849^2 + 0{,}6849^2} + \sqrt{(1{,}3151 - 0{,}6849)^2 + (1 - 0{,}6849)^2} + 1{,}5708 - 1{,}3151\right) =$$

$$2 \cdot 1{,}9289 = 3{,}8578$$

Die lineare Approximationsfunktion g an einer Stelle $x_0 \in D_f$ bedeutet, wie man im Beispiel deutlich gesehen hat, in geometrischer Sicht eine Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0. An Stellen, wo der Graph von f an der Stelle x_0 senkrechte Tangenten mit der Gleichung $x=x_0$ aufweist, ist f nicht differenzierbar; es gibt dort keine lineare Approximation im oben beschriebenen Sinne, trotzdem aber eine Tangente.

Satz: *(Tangentengleichung)*

Die Gleichung einer nicht zur y-Achse parallelen Tangente t an den Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 lautet: $\quad t: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Die Gleichung einer zur y-Achse parallelen Tangente an den Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 lautet: $\quad t: x = x_0$