3. Grenzwert und Stetigkeit

3.1 Die Anschauung der Begriffe “Grenzwert” und “Stetigkeit” an einer Stelle x_0

Der folgende Abschnitt führt in intuitiver Weise auf die Begriffe “Grenzwert” und “Stetigkeit” hin, ohne in der Definition einen Anspruch auf wissenschaftliche Strenge zu erheben.

Linksseitiger Grenzwert an der Stelle x_0

Eine Funktion f hat den linksseitigen Grenzwert a an der Stelle x_0, wenn der Graph von f aus der Perspektive eines x, welches kleiner als x_0 ist, den Punkt $P(x_0/a)$ anpeilt.

Man schreibt für den linksseitigen Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$$

Wir verwenden die linke dieser alternativen Schreibweisen.

Rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle x_0

Eine Funktion f hat den rechtsseitigen Grenzwert a an der Stelle x_0, wenn der Graph von f aus der Perspektive eines x, welches größer als x_0 ist, den Punkt $P(x_0/a)$ anpeilt.

Man schreibt für den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$$

Wir verwenden die linke dieser alternativen Schreibweisen.

Grenzwert an der Stelle x_0

Eine Funktion f hat den Grenzwert a an der Stelle x_0, wenn sowohl der rechtsseitige als auch der linksseitige Grenzwert an der Stelle x_0 bestimmbar sind, und beide einseitigen Grenzwerte den Wert a ergeben. Man schreibt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = a = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Bevor die Begriffe des links- und des rechtsseitigen Grenzwertes und des Grenzwertes an konkreten Beispielen erläutert werden, wird auf einen Gesichtspunkt hingewiesen, der zwar oben nicht erwähnt ist, dessen Nicht-Erwähnung aber trotzdem eine Aussage wert ist:

Die Stelle x_0, für die ein Grenzwert a beziehungsweise einer der beiden einseitigen Grenzwerte a der Funktion f errechnet werden soll, muss nicht ein Element des Definitionsbereiches von f sein; a muss also auch nicht zum Bildbereich von f gehören.

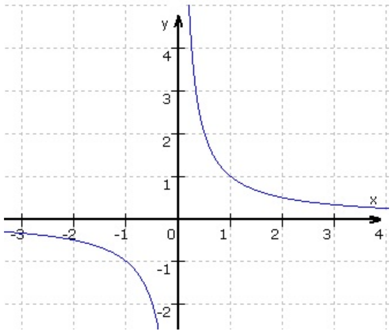
Im folgenden sind gängige Fälle, die bei der Bestimmung ein- beziehungsweise beidseitiger Grenzwerte an einer Stelle x_0 auftreten in Schaubildern und Beispielen dokumentiert:

Funktionen ohne Grenzwert an einer Stelle x_0 wegen einer Unendlichkeitsstelle an x_0
Uneigentliche Grenzwerte

Beisp: *(Die Kehrwertfunktion)*

Die Kehrwertfunktion weist an der Stelle $x_0=0$ keinen Grenzwert auf, denn bei zunehmender Annäherung von rechts an die Stelle x_0 wächst der Funktionswert von f über alle Grenzen, bei Annäherung von links fällt er unter alle Grenzen. Man notiert:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \infty$$



Im Allgemeinen findet man entsprechend:

Uneigentliche Grenzwerte

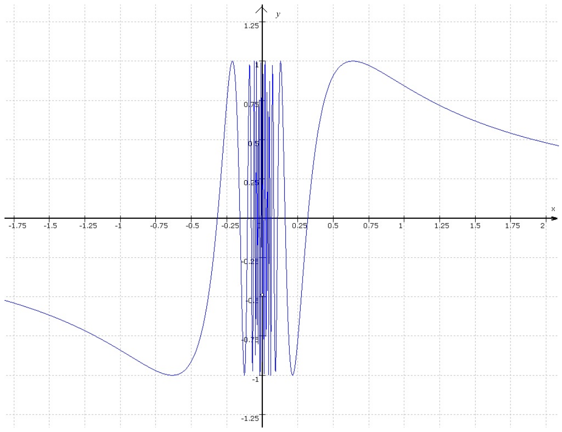
Falls ein Grenzwert an einer Stelle x_0 nicht ermittelbar ist, weil bei zunehmender Annäherung an x_0 alle Grenzen über- beziehungsweise unterschritten werden, spricht man von uneigentlichen Grenzwerten und findet folgende mögliche Schreibweisen:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \infty \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \infty \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = -\infty$$

Funktionen ohne Grenzwert an einer Stelle x_0 wegen unendlich häufiger Schwingungen mit nennenswerter Schwingungsweite in der Nähe von x_0

Beisp:*(Eine Funktion ohne Grenzwert an x_0 mit unendlichen Schwingungen in der Nähe von x_0)*

Wir betrachten das Schaubild der Funktion f mit: $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

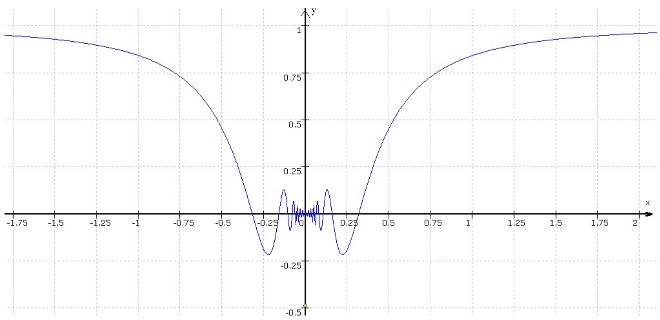


Anhand des Graphen wird deutlich, dass an der Stelle $x_0 = 0$ kein Grenzwert a angepeilt wird, weil der Graph der Funktion in der Nähe von x_0 unendlich oft zwischen y=1 und y=-1 hin- und herschwingt.

Es gibt allerdings auch vom Term her ähnliche Graphen, die zwar ebenfalls hin- und herschwingen, trotzdem aber einen Grenzwert aufweisen. Ein Beispiel:

Beisp:*(Eine Funktion mit Grenzwert an x_0 mit unendlichen Schwingungen in der Nähe von x_0)*

$g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Es gilt hier: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$



Funktionen ohne Grenzwert, aber mit einseitigen Grenzwerten an einer Stelle x_0

Beisp: *(Grenzwert an den Enden eines Definitionsintervalls)*

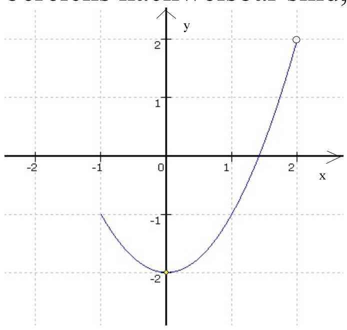
Untersuche die Funktion f: $[-1,2[\to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^2-2$ auf Grenzwerte an den Enden des Definitionsbereiches!

Aufgrund der Beschaffenheit des Definitionsbereiches findet man an der Stelle $x_0=-1$ nur einen rechtsseitigen und an der Stelle $x_0=2$ nur einen linksseitigen Grenzwert. Also:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x^2-2 = (-1)^2-2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x^2-2 = 2^2-2 = 2$$

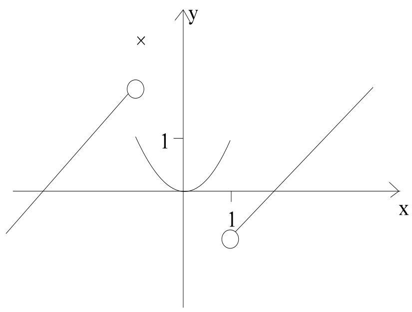
Man beachtet anhand der Zeichnung, dass die einseitigen Grenzwerte an den Enden des Definitionsbereichs nachweisbar sind, obwohl $x_0 = 2$ nicht im Definitionsbereich liegt.



Beisp: *(Eine Funktion mit Stellen x_0, an denen beide einseitigen Grenzwerte existieren, aber verschieden sind)*

Wir untersuchen folgende über ihre Gleichung gegebene und auf ℝ definierte Funktion f hinsichtlich möglicher Grenzwerte an den Stellen $x_0 = -1$ und $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < -1 \\ 3 & x = -1 \\ x^2 & -1 < x \le 1 \\ x-2 & x > 1 \end{cases}$$



Die Errechnung der verlangten Grenzwerte ergibt:

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x+3 = -1+3 = 2 \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x^2 = 1^2 = 1 \qquad \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x+3 = -1+3 = 2$$

Es fällt auf, dass an der Stelle $x_0 = -1$ zwar ein rechtsseitiger wie auch ein linksseitiger Grenzwert ermittelt werden können, aber beide nicht gleich dem Funktionswert f(-1)=3 sind. An der Stelle $x_0=1$ ist der linksseitige Grenzwert gleich dem Funktionswert f(1) = 1, der rechtsseitige dagegen nicht.

Funktionen mit Grenzwert an einer Definitionslücke x_0

Beisp: *(Eine Funktion mit Grenzwert an einer Definitionslücke x_0)*

Gegeben ist die Funktion f über ihre Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

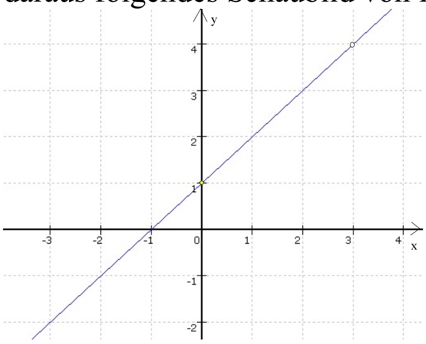
Der maximal mögliche Definitionsbereich von f ist gleich der Menge D = ℝ \ {3}.

Durch Faktorisieren des Zählers des Funktionsterms und nachfolgendes Kürzen findet man eine Vereinfachung des Funktionsterms, denn für alle $x \in D$ gilt:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1 - 3}{x - 3} = \frac{(x-1)^2 - 4}{x - 3} =$$

$$\frac{(x-1-2)\cdot(x-1+2)}{x - 3} = \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{x - 3} = x + 1$$

Unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches und des vereinfachten Funktionsterms ergibt sich daraus folgendes Schaubild von f:



Die Funktion f weist an der Stelle $x_0=3$ einen Grenzwert auf, obwohl diese Stelle nicht zum Definitionsbereich gehört. Man rechnet:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} x + 1 = 4 \quad \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} x + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

Wir variieren in den beiden nächsten Fallstudien das zuletzt behandelte Beispiel:

Funktionen mit Grenzwert a an einer Stelle x_0, wobei $f(x_0) \neq a$

Beisp: *(Eine Funktion mit Grenzwert an einer Stelle x_0 mit $f(x_0) \neq a$)*

Gegeben ist die Funktion f über ihre Gleichung

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & x \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$$

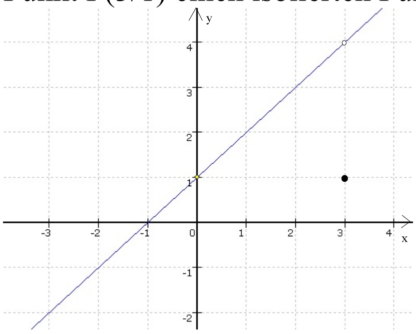
Diese Funktion ist auf der Menge $\mathbb{R}$ aller reeller Zahlen erklärt. Sie geht aus der im vorangegangenen Beispiel verwendeten Funktion dadurch hervor, dass an der bisherigen Definitionslücke $x_0=3$ ein Funktionswert angegeben ist. Unter Anwendung der Rechnungen oben schreibt man für die abgewandelte Funktion einfacher:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 3 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$$

Die abgewandelte Funktion weist an der Stelle $x_0=3$ ebenfalls einen Grenzwert auf:

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} x+1 = 4 \quad \lim_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} x+1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

Der Wert des Grenzwertes ist 4, stimmt also nicht mit dem Funktionswert f(3), welcher den Wert 1 hat überein. Man vollzieht den dargestellten Zusammenhang in der Zeichnung nach und erkennt im Punkt P(3/1) einen isolierten Punkt des Funktionsgraphen:



Funktionen mit Grenzwert a an einer Stelle x_0, wobei $f(x_0)=a$)

Im folgenden Beispiel werden die beiden vorangegangenen erneut aufgegriffen, die fragliche Stelle $x_0=3$ wird aber so besetzt, dass der Graph von f in einem Zug durchgezeichnet werden kann.

Beisp: *(Eine Funktion mit Grenzwert an einer Stelle x_0 mit $f(x_0)=a$)*

Gegeben ist die Funktion f über ihre Gleichung

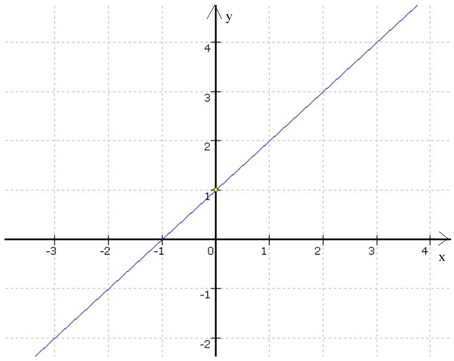
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases}$$

Diese Funktion ist auf der Menge ℝ aller reeller Zahlen erklärt. Sie geht aus den in den vorangegangenen Beispielen verwendeten Funktionen dadurch hervor, dass nicht nur an der früheren Definitionslücke $x_0=3$ ein Funktionswert angegeben ist, sondern dieser Funktionswert mit dem Grenzwert übereinstimmt. Es ist also:

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} x+1 = 4 \quad \lim_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} x+1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 3} f(x) = 4 = f(3)$$

Der Graph der nun entstandenen Funktion unterscheidet sich in nichts vom Graph der Gerade mit der Gleichung y = x+1:

Entsprechend kann man die Funktionsgleichung der für alle reellen Zahlen definierten Funktion f stark vereinfachen:



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & x \neq 3 \\ 4 & x = 3 \end{cases} = x+1$$

Der zuletzt aufgetretene Fall, dass der Grenzwert a an einer Stelle ermittelbar und gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist, entspricht dem, was man im Rahmen der Mittelstufenmathematik von einem Funktionsgraphen gewohnt ist. Wir haben anhand der Beispiele aber sehen können, dass es viele andere Beispiele von Funktionen gibt, bei denen dies so nicht durchführbar ist. Der besonders angenehme "Normalfall" wird deshalb mit einer eigenen Bezeichnung erwähnt.

Stetigkeit an einer Stelle x_0

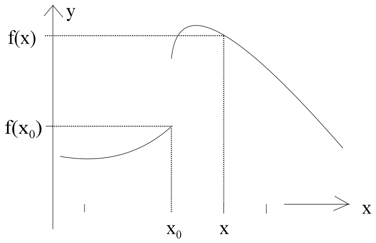
> Lässt sich an einer Stelle x_0 der Grenzwert a der Funktion bestimmen, und ist a gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0, dann heißt f stetig an der Stelle x_0. Also ist f stetig an der Stelle x_0, wenn
>
> $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Wir halten zur Beziehung der Begriffe "Grenzwert an einer Stelle x_0" und "Stetigkeit an einer Stelle x_0" fest:

- Wenn f stetig an der Stelle x_0 ist, muss f einen Grenzwert an der Stelle x_0 aufweisen.
- Wenn f einen Grenzwert a an der Stelle x_0 aufweist, dann muss f an der Stelle x_0 nicht stetig sein.
- f ist sicher nicht stetig an der Stelle x_0, wenn f keinen Grenzwert an der Stelle x_0 aufweist.

3.2 Die formale Definition des Grenzwertes und der Stetigkeit an einer Stelle x_0

Wir beginnen mit dem Gegenbegriff zur Stetigkeit und erklären, wann eine an und in der Nähe einer Stelle x_0 überall definierte Funktion f unstetig an einer Stelle x_0 ist. Dazu betrachten wir eine weitere Stelle x, die "sehr nahe" bei x_0 liegt und legen fest: f ist unstetig an der Stelle x_0, wenn der Abstand zwischen $y = f(x)$ und $f(x_0)$ "groß" ist, obwohl doch x sehr nahe bei x_0 liegt.



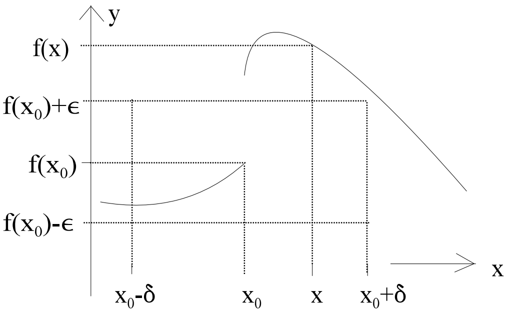
Dieser noch grobe Unstetigkeitsbegriff muss präzisiert werden, indem man angibt, was “sehr nahe” und “groß” bedeuten soll. Dass x und x_0 “sehr nahe” beieinander liegen, drückt man aus durch: Der Abstand von x und x_0 ist kleiner als jede beliebige positive Zahl δ. Speziell ist der Abstand von x und x_0 damit also auch kleiner als jede winzig kleine positive Zahl δ. Dass der Abstand von f(x) und $f(x_0)$ “groß” ist formuliert man so: Es gibt eine positive Zahl ϵ, die kleiner oder gleich dem Abstand von f(x) und $f(x_0)$ ist.

Also sagt man: Eine Funktion f ist unstetig an einer Stelle x_0, wenn es für jeden Abstand δ eine Zahl x gibt, deren Abstand von x_0 kleiner als δ ist, deren Funktionswert f(x) von $f(x_0)$ aber einen Abstand aufweist, der größer oder gleich einer Zahl ϵ ist. Drückt man den Abstand zweier Zahlen wie üblich über den Betrag ihrer Differenz aus, ergibt sich daraus:

Def: *(Unstetigkeit an einer Stelle x_0)*

Eine Funktion f ist unstetig an einer Stelle x_0, wenn es für jeden Abstand δ eine Zahl x mit der Eigenschaft $|x-x_0|<\delta$ gibt, für die gilt: Es gibt ein ϵ mit $|f(x)-f(x_0)|\geq\epsilon$.

Die im Vergleich zu oben erweiterte Zeichnung stellt diese Situation dar:

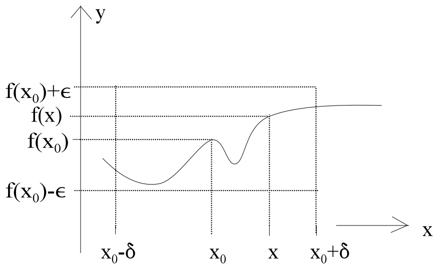


Stetig ist eine Funktion an einer Stelle x_0 dann, wenn sie nicht unstetig ist. Um zu sagen, was Stetigkeit an einer Stelle x_0 bedeutet, verneinen wir also die obigen Aussagen zur Unstetigkeit: Eine Funktion f ist folglich stetig an einer Stelle x_0, wenn der Funktionswert f(x) aller Zahlen x, deren Abstand von x_0 kleiner als ein δ ist, von $f(x_0)$ einen Abstand aufweist, der kleiner als jede Zahl ϵ ist. Die Zahl δ kann dabei von ϵ abhängen. Drückt man den Abstand zweier Zahlen über den Betrag ihrer Differenz aus, ergibt sich daraus:

Def: *(Stetigkeit an einer Stelle x_0)*

Eine Funktion f ist stetig an einer Stelle x_0, wenn es für jeden Abstand ϵ eine Zahl δ so gibt, dass $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ für alle x mit der Eigenschaft $|x-x_0|<\delta$.

Die Zeichnung stellt diese Situation dar:



Das folgende Beispiel zeigt, wie man rechnerisch mit diesen Überlegungen umgeht.

Beisp: (*Stetigkeitsnachweis mit Hilfe der wissenschaftlichen Stetigkeitsdefinition*)

Zeige: Die Funktion f mit f(x) = 3x+4 ist stetig an allen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$.

Man geht aus von der Ungleichung $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$, welche für beliebiges ϵ erfüllt sein muss, isoliert dort möglichst den Term $|x-x_0|$ und schließt auf ein passendes δ, für das die Ungleichung realisierbar wird.

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow |3x + 4 - (3x_0 + 4)| < \epsilon \Leftrightarrow |3x - 3x_0| < \epsilon \Leftrightarrow$$

$$|3(x - x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow 3 \cdot |x - x_0| < \epsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{3}$$

Also ist für jedes beliebige ϵ dann $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$, wenn $|x-x_0| < \epsilon/3$. Folglich ist: $\delta = \epsilon/3$.

Der Begriff des Grenzwertes unterscheidet sich, wie man schon oben gesehen hat, nur geringfügig von dem der Stetigkeit. Unterschied ist, dass Stetigkeitsuntersuchungen an einer Stelle x_0 die Umgebung des Punktes P (x_0 / f(x_0)) sowie der Punkt selbst betrachtet werden, bei Grenzwertbetrachtungen aber nur die Umgebung der Stelle x_0 und nicht die der Punkt P.

Def: *(Grenzwert an einer Stelle x_0)*

Eine Funktion f besitzt einen Grenzwert a an einer Stelle x_0, wenn es für jeden Abstand ϵ eine Zahl δ so gibt, dass $|f(x)-a|<\epsilon$ für alle x mit der Eigenschaft $|x-x_0|<\delta$, wobei allerdings $x \neq x_0$.

3.3 Die Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze zeigen an, wie man Grenzwerte von Funktionen h berechnet, die aus anderen Funktionen, über deren Grenzwertverhalten man informiert ist, rechnerisch zusammengesetzt sind. Am einfachsten ist die Sachlage bei Verknüpfung über Funktionenaddition, Funktionensubtraktion und Funktionenmultiplikation; hier gilt, wie man erwarten kann:

Satz: *(Grenzwertsätze für Funktionenaddition, -subtraktion und -multiplikation)*

Ist f eine Funktion mit Grenzwert a an der Stelle x_0,, g eine Funktion mit Grenzwert b an der Stelle x_0 , dann weisen auch die Funktionen $h_1 = f + g$ $h_2 = f - g$ $h_3 = f \cdot g$ an der Stelle x_0 jeweils einen Grenzwert auf, und es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} h_1(x) = \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b$$

$$\lim_{x \to x_0} h_2(x) = \lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = a - b$$

$$\lim_{x \to x_0} h_3(x) = \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = a \cdot b$$

Bei Betrachtung von Grenzwerten bei Funktionendivision ist eine mögliche Division durch 0 auszuschließen. Hier findet man:

Satz: *(Grenzwertsatz für Funktionendivision)*

Ist f eine Funktion mit Grenzwert a an der Stelle x_0,, g eine Funktion mit Grenzwert b an der Stelle x_0 und ist $b \neq 0$, dann weist auch die Funktion

$$h_4 = \frac{f}{g}$$

an der Stelle x_0 einen Grenzwert auf, und es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} h_4(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$$

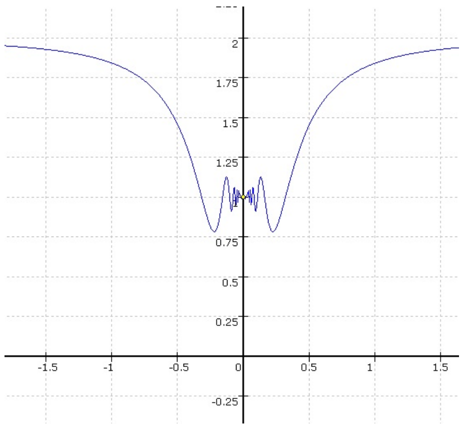
Schwieriger liegt der Fall bei der Ermittlung von Grenzwerten nach Hintereinanderausführung zweier Funktionen; hier ist es nicht so, dass das Vorhandensein von Grenzwerten von f und g einen Grenzwert der Hintereinanderausführung von f und g garantieren könnte. Wir betrachten die auftretende Komplikation an einem Beispiel:

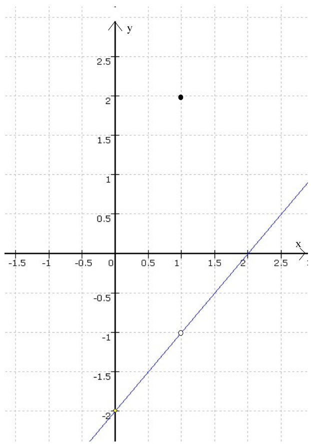
Beisp: *(Schwierigkeit der Grenzwertberechnung bei Hintereinanderausführung)*

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch ihre Funktionsgleichungen

$$f(x) = 1 + x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad g(x) = \begin{cases} x-2 & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

Die beiden Graphen von f und g sind:





f besitzt einen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

g besitzt einen Grenzwert an der Stelle x=1: $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} x-2 = -1$

Die Bildung des Grenzwertes der Hintereinanderausführung $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(f(x))$

gelingt jedoch nicht, denn in der Nähe der Stelle $x_0 = 0$ passiert die Funktion f unendlich oft den Funktionswert y=1 und zwar immer dann, wenn gilt:

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi + 2k\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{(2k+1)\,\pi} \Leftrightarrow$$

$$.... \; x = -\frac{2}{3\pi} \vee x = -\frac{2}{\pi} \vee x = \frac{2}{\pi} \vee x = \frac{2}{3\pi} \vee \; .....$$

Mit k ist hier eine ganze Zahl bezeichnet.

An der Stelle x=1 hat die Funktion g ein unstetiges Verhalten; deshalb bewegt sich in diesem Moment der Funktionswert der Funktion g∘f jedesmal aus der Nähe von y=-1 auf den Wert y=2, so dass g∘f keinen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ aufweisen kann, obwohl die beiden Einzelfunktionen Grenzwerte an den betrachteten Stellen besitzen.

Das im Beispiel verdeutlichte Problem wird vermieden, wenn man von der äußeren Funktion der Hintereinanderausführung Stetigkeit an der Stelle 1 verlangt. Entsprechend gilt im Allgemeinen:

Satz: *(Grenzwertsatz für die Hintereinanderausführung von Funktionen)*

Wenn f eine Funktion mit Grenzwert a an der Stelle x_0 ist und g eine Funktion, welche an der Stelle a definiert und dort stetig ist, dann weist auch die Funktion $h_5 = g \circ f$ an der Stelle x_0 einen Grenzwert auf, und es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} h_5(x) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} (g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(a) = b$$

3.4 Stetige Funktionen

Bisher haben wir den Begriff der Stetigkeit für eine Stelle x_0 verwendet; man nennt diesen Stetigkeitsbegriff lokal. Verwendet man den Stetigkeitsbegriff für eine Funktion, spricht man von globaler Stetigkeit. Man definiert dazu:

Def: *(Stetige Funktion)*

Eine Funktion $f{:}D\rightarrow\mathbb{R}$ heißt stetig, wenn sie für alle Stellen $x_0 \in D$ stetig ist.

Man erkennt stetige Funktionen am Aussehen ihrer Graphen:

Graphen stetiger Funktionen lassen sich über ihrem Definitionsbereich in einem Zug durchzeichnen, lassen sich also skizzieren, ohne den Stift absetzen zu müssen.

Entsprechend stellt man fest, dass alle aus früheren Schuljahren bekannten Funktionen stetig sind; zum Beispiel die linearen Funktionen, die Parabeln, Polynomfunktionen oder die trigonometrischen Funktionen. Bei Beurteilung einer Funktion f über das "optische Stetigkeitskriterium" der Durchzeichenbarkeit des Funktionsgraphen von f ist der Passus "... über ihrem Definitionsbereich ..." besonders zu beachten, denn auch eine Funktion wie die Kehrwertfunktion, deren Graph, wie wir schon gesehen haben, aus zwei Zweigen besteht, ist stetig, weil sie über ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ durchzeichenbar ist.

Wir merken uns entsprechend:

An Stellen x_0, die nicht zum Definitionsbereich einer Funktion f gehören, ist f weder auf Stetigkeit, noch auf Unstetigkeit zu beurteilen.

3.5 Praktisches Vorgehen bei der Berechnung von Grenzwerten

3.5.1 Faktorisierung

Dieses Unterkapitel ist nicht nur für die Berechnung von Grenzwerten, sondern auch allgemein bedeutsam; es behandelt Rechentechniken, mit deren Hilfe man aus Summen- beziehungsweise Differenztermen Produktterme erzeugen kann; übergreifend bezeichnet man solche Techniken mit "Faktorisieren". Wendet man Faktorisierungen gezielt an, erhält man nicht nur rechnerisch Vorteile, sondern erleichtert sich in vielen Situationen auch das Verständnis; das gilt zum Beispiel für die Berechnung von Grenzwerten, aber auch in vielen anderen Fällen.

Man verwendet man zur Bestimmung der Faktorisierung einer Strichrechnung folgende Techniken:

- Ausklammern
- Binomische Formeln
- Quadratische Ergänzung in Verbindung mit der 3. binomischen Formel
- Polynomdivision
- Koeffizientenvergleich nach Ansatzlösung

Die Reihenfolge ist bedeutsam, denn der Rechenaufwand nimmt von oben nach unten zu; man sollte also immer zuerst sehen, ob man ausklammern kann, als letzte Möglichkeit erst eine Ansatzlösung in Erwägung ziehen. Wir erklären hier noch einmal Polynomdivision und die Ansatzlösung. Die allgemeinen Möglichkeiten dieser werden durch folgenden Satz umschrieben:

Satz: *(Möglichkeiten der Umformung von Polynomtermen in Faktoren)*

Jedes Polynom lässt sich als Produkt linearer und nicht weiter faktorisierbarer quadratischer Terme darstellen.

Das Verfahren der Polynomdivision lässt sich zur Faktorisierung eines Polynoms p anwenden, wenn man - zum Beispiel durch Raten - bereits irgendwelche Nullstellen von p erkannt hat.

Satz: *(Faktorisierung von Polynomen durch Polynomdivision)*

Ist p eine ganzrationale Funktion vom Grad n und x_0 eine Nullstelle von p, dann lässt sich p multiplikativ schreiben als: $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$

q ist dabei ein Polynom vom Grad n-1. Man findet den Funktionsterm von q, indem man p durch den Term $x - x_0$ dividiert.

Beisp: *(Faktorisierung eines Polynoms durch Polynomdivision)*

Zerlege das folgende Polynom p in Linearfaktoren. $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

Ist, wie hier, der Grad des zu zerlegenden Polynoms p größer als zwei, dann findet man Nullstellen durch Raten und Probieren; p weist zum Beispiel die Nullstelle $x_0 = 2$ auf. Der Funktionsterm von p lässt sich also durch den Term x-2 dividieren.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x-2) = x^2 - 2x - 3 \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\qquad -2x^2 + x \\
\qquad \underline{-2x^2 + 4x} \\
\qquad\qquad -3x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-3x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$\Rightarrow p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3) \cdot (x-2)$$

Das entstandene Polynom q zweiten Grades mit der Gleichung $q(x) = x^2 - 2x - 3$ lässt sich durch erneute Polynomdivision oder über die Kombination von quadratischer Ergänzung und drittem binomischen Lehrsatz weiter in Faktoren zerlegen. Der zweite Weg ist hier angedeutet.

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4 = (x-1)^2 - 2^2 =$$

$$(x - 1 + 2) \cdot (x - 1 - 2) = (x+1) \cdot (x-3)$$

Zusammengefasst findet man als Linearfaktorzerlegung des Polynoms p:
$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x^2 - 2x - 3) \cdot (x-2) = (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x-2)$
p hat also bei x = -1, x = 3 und x = 2 jeweils eine einfache Nullstelle.

Besitzt das Polynom, welches man zerlegen möchte, keine Nullstellen, beziehungsweise sind die Nullstellen nicht unmittelbar zugänglich, verwendet man einen geeigneten Ansatz und führt dann einen Koeffizientenvergleich durch; diesem Verfahren verdankt die Ansatzlösung ihren Namen.

Beisp: *(Faktorisierung eines Polynoms durch eine Ansatz und Koeffizientenvergleich)*

Faktorisiere das Polynom p mit der Gleichung $p(x) = x^4 + 1$!

p weist offenbar keine Nullstellen auf und lässt sich deshalb auch nicht per Polynomdivision faktorisieren; auch Wege über Ausklammern oder die binomischen Formeln bieten sich nicht an. Andererseits gibt der oben zitierte allgemeine Satz an, dass p(x) in lineare und/oder quadratische Terme faktorisiert werden kann. Da p 4. Grades ist, versucht man eine Faktorisierung in zwei quadratische Terme; daraus ergibt sich der folgende Ansatz:

$p(x) = (x^2 + ax + b) \cdot (x^2 + cx + d)$

Zur Bestimmung der Zahlen a, b, c und d multipliziert man die rechte Seite aus und ordnet nach Potenzen von x:

$p(x) = (x^2 + ax + b) \cdot (x^2 + cx + d) \Leftrightarrow$

$x^4 + 1 = x^4 + c\,x^3 + d\,x^2 + a\,x^3 + a\,c\,x^2 + a\,d\,x + b\,x^2 + b\,c\,x + b\,d \Leftrightarrow$

$x^4 + 1 = x^4 + (a + c)\,x^3 + (d + a\,c + b)\,x^2 + (a\,d + b\,c)\,x + b\,d$

Nun hat man beiderseits der Gleichung je ein Polynom 4. Grades mit der Variablen x erhalten. Da zwei Polynome genau dann gleich sind, wenn sie in ihren Koeffizienten übereinstimmen, vergleicht man:

Koeffizient	linkes Polynom	rechtes Polynom
vor x^4	1	1
vor x^3	0	a + c
vor x^2	0	a c + b + d
vor x^1	0	a d + b c
vor x^0	1	b d

Daraus ergibt sich das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung von a, b, c und d:
i) $0 = a + c$
ii) $0 = a\,c + b + d$
iii) $0 = a\,d + b\,c$
iv) $1 = b\,d$

Aus der Gleichung i) ergibt sich c = -a, aus iv) $d = \frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$. Eine Einsetzung dieser Ergebnisse in die Gleichung ii) und iii) liefert:

$$ii)\quad 0 = -a^2 + b + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 0 = -a^2 b + b^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = -a^2 b + b^2 + 1$$

$$iii)\quad 0 = \frac{a}{b} - a\,b \Leftrightarrow 0 = a - a\,b^2 \Leftrightarrow 0 = a \cdot \left(1 - b^2\right)$$

Die Gleichung iii) ist erfüllt für a=0 ∨ b=1 ∨ b= -1.

- a = 0 hält einer Überprüfung in ii) nicht stand, denn dort ergäbe sich die unlösbare Gleichung $0 = b^2 + 1$.

- b = -1 liefert bei Einsetzung in ii) $a^2 + 2 = 0$; damit führt auch dieser Ansatz zu einer unlösbaren Gleichung.

Die Einsetzung von b = 1 in ii) führt schließlich zur gewünschten Lösung; man findet:

$$ii)\quad 0 = -a^2 + 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2}$$

Also sind folgende Lösungen für a, b, c, d möglich:

$$\left(a = \sqrt{2} \wedge b = 1 \wedge c = -\sqrt{2} \wedge d = 1\right) \vee \left(a = -\sqrt{2} \wedge b = 1 \wedge c = \sqrt{2} \wedge d = 1\right)$$

Also ist:

$$f(x) = x^4 + 1 = \left(x^2 + \sqrt{2}\,x + 1\right) \cdot \left(x^2 - \sqrt{2}\,x + 1\right)$$

Ein Versuch, die entstandenen quadratischen Terme mithilfe der quadratischen Ergänzung und der binomischen Formeln weiter zu faktorisieren, bringt keinen Erfolg; eine weitergehende Faktorisierung ist nicht möglich.

3.5.2 Praxis der Grenzwertberechnung an typischen Beispielen

Ganz einfach ist die Berechnung von Grenzwerten an einer Stelle x_0,wenn die Funktion f dort stetig ist, der Grenzwert also gleich dem Funktionswert ist. In aller Regel erkennt man diese Situation so, dass man bei Einsetzen der gewünschten Stelle x_0 zweifelsfrei eine feste Zahl erhält, also beispielsweise nicht mit fiktiven Zahlen ∞ oder -∞ hantieren muss, oder eine Division durch 0 beziehungsweise andere Ungereimtheiten erklären muss.

Beisp: *(Der einfache Fall der Grenzwertberechnung)*

Zwei ähnlich Beispiele zur einfachen Berechnung von Grenzwerten:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 1} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 3}{2 \cdot 3^2 - 1} = \frac{6}{17} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 1} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3^2 - 1} = \frac{0}{17} = 0$$

Sehr oft beruhen Rechentechniken zur Grenzwertermittlung auf einer geschickten Faktorisierung. Beginnen wir mit unendlichen Grenzwerten, wo also der Wert der Variablen alle Grenzen übersteigt. Wir betrachten Polynome, auch ganzrationale Funktionen genannt und klammern im Beweis des Satzes geschickt aus.

Def: *(Polynomfunktion, ganzrationale Funktion)*

Eine Funktion $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt Polynomfunktion n-ten Grades oder ganzrationale Funktion n-ten Grades genau dann, wenn sich ihre Funktionsgleichung in der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (n\in\mathbb{N},\ a_n \neq 0)$$

schreiben lässt. Die reellen Zahlen a_0, ...,a_n heißen die Koeffizienten des Polynoms.

Beisp: *(Eine ganzrationale Funktion)*

Die Funktion p mit der Gleichung $p(x) = -3x^5 + 4x^3 - x^2 + 6x - 7$ ist eine Polynomfunktion 5. Grades mit den Koeffizienten $a_5 = -3$, $a_4 = 0$, $a_3 = 4$, $a_2 = -1$, $a_1 = 6$, $a_0 = -7$.

Satz: *(Unendliche Grenzwerte von Polynomen)*

Die unendlichen Grenzwerte eines Polynoms p mit der Gleichung

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad (n\in\mathbb{N})$$

werden ausschließlich durch das unendliche Grenzwertverhalten des Polynomsummanden mit der größten Potenz bei x, also durch den Term $a_n x^n$, bestimmt. Dabei ergibt sich:

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & a_n > 0 \\ -\infty & a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & a_n > 0 \wedge n \text{ gerade} \\ -\infty & a_n > 0 \wedge n \text{ ungerade} \\ \infty & a_n < 0 \wedge n \text{ ungerade} \\ -\infty & a_n < 0 \wedge n \text{ gerade} \end{cases}$$

Bew: Für $x \neq 0$ gilt:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 =$$

$$x^n \cdot \left(a_n \cdot \frac{x^n}{x^n} + a_{n-1} \cdot \frac{x^{n-1}}{x^n} + ... + a_2 \cdot \frac{x^2}{x^n} + a_1 \cdot \frac{x}{x^n} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n} \right) =$$

$$x^n \cdot \left(a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + ... + a_2 \cdot \frac{1}{x^{n-2}} + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n} \right)$$

Da außer a_n alle in der Klammer auftretenden Summanden für $x \to \pm\infty$ den Grenzwert 0 aufweisen, ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Erweitern wir die Überlegungen auf rationale Funktionen im Ganzen, ergänzen also gebrochenrationale:

Def: *(gebrochenrationale Funktion)*

Eine Funktion $f{:}D_f \to \mathbb{R}$ heißt gebrochenrational genau dann, wenn sie als Quotient von zwei ganzrationalen Funktionen p und q geschrieben werden kann.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Aus der Definition der gebrochenrationalen Funktion liest man ab, dass die Polynomfunktionen Teilmenge der gebrochenrationalen Funktionen sind, indem man im Nennerpolynom b_0=1 und alle anderen Koeffizienten auf 0 setzt. Das folgende Beispiel zeigt einige Funktionsgleichungen gebrochenrationaler Funktionen, ohne auf deren Bedeutung näher einzugehen.

Beisp: *(Funktionsgleichungen gebrochenrationaler Funktionen)*

$$f_1(x) = \frac{5x^2+6}{x+3} \qquad f_2(x) = \frac{x}{x^7+4x^5} \qquad f_3(x) = 5x^4 - 3x^2$$

Zur Berechnung von unendlichen Grenzwerten rationaler Funktionen zerlegt man deren Term zunächst per Polynomdivision in einen Polynomanteil und einen gebrochenrationalen Rest; diese Technik ist notwendig, wenn der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem des Nennerpolynoms ist. Anschließend kann man die gewünschten unendlichen Grenzwerte ermitteln.

Beisp: *(Zerlegung einer unecht gebrochenrationalen Funktion)*

$$f(x) = \frac{6x^3-4x^2+5x-3}{x^2+2x+7}$$

$$(6x^3-4x^2+5x-3) : (x^2+2x+7) = 6x - 16 + \frac{-5x+109}{x^2+2x+7}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{6x^3+12x^2+42x} \\
\quad -16x^2-37x-3 \\
\quad \underline{-16x^2-32x-112} \\
\qquad\quad -5x+109
\end{array}$$

Den sich ergebenenden ganzen Anteil, hier mit der Gleichung y = 6x -16 nennt man Asymptote der Funktion; dieser ganze Anteil bestimmt das Verhalten der Funktion wenn x → ∞ oder x → -∞, denn der nicht dividierte Rest wird für sehr große beziehungsweise sehr kleine x unbedeutend, weil

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x+109}{x^2+2x+7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot \left(-5+\frac{109}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5+\frac{109}{x}}{x \cdot \left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = 0$$

Also erhält man:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^3-4x^2+5x-3}{x^2+2x+7} = \lim_{x\to\infty} 6x-16 = \infty$$ und analog

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{6x^3-4x^2+5x-3}{x^2+2x+7} = \lim_{x\to -\infty} 6x-16 = -\infty$$

Ergibt sich beim Versuch der Ermittlung des Grenzwertes eines Bruchterms, dass der Zähler eine feste Zahl ungleich der Null, der Nenner aber gleich Null ergibt, stellt man fest, dass die Grenzwerte prinzipiell einseitig ermittelt oder bedacht werden müssen und dass nur entweder +∞ oder -∞ als dann uneigentlicher Grenzwert ermittelt werden kann. Nach dieser Erkenntnis stellt man dann fest, dass in diesem Fall einzig noch das Vorzeichen ermittelt werden muss. Hierbei leistet eine Faktorisierung von Zähler und Nenner sehr gute Dienste.

Beisp: *(Der Fall "feste, von 0 verschiedene Zahl, dividiert durch 0")*

Berechne $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^3+6x^2-x-6}$

Einsetzen des x-Wertes 1ergibt im Zähler -3, im Nenner 0. Also müssen die Grenzwerte einseitig berechnet werden, und es kann sich als Grenzwert jeweils nur +∞ oder -∞ ergeben.

Der Zähler des Bruchtermes lässt sich mit dritter binomischer Formel faktorisieren, der Nenner per Polynomdivision; man findet:

$$\frac{x^2-4}{x^3+6x^2-x-6} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+6)}$$

Untersucht man die Vorzeichen der Einzelfaktoren für x nahe bei 1 und x<1, ergibt sich:

$$\frac{\overset{-}{(x-2)}\cdot\overset{+}{(x+2)}}{\underset{-}{(x+1)}\cdot\underset{-}{(x-1)}\cdot\underset{+}{(x+6)}}$$ und damit findet man

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2-4}{x^3+6x^2-x-6} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+6)} = -\infty$$

Für x nahe bei 1 und x>1 findet man folgende Vorzeichenverteilung:

$$\frac{\overset{-}{(x-2)}\cdot\overset{+}{(x+2)}}{\underset{-}{(x+1)}\cdot\underset{+}{(x-1)}\cdot\underset{+}{(x+6)}}$$, woraus sich ergibt

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2-4}{x^3+6x^2-x-6} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+6)} = \infty$$

Der nächste kritische Fall, der aufmerksam zu bedenken ist, ergibt sich, wenn man in Zähler und Nenner 0 erhält, wenn man zunächst probeweise einsetzt. Ausdrücklich sei hier gesagt, dass dieser Fall prinzipiell ergebnisoffen ist, sich schließlich Grenzwerte aus der kompletten reellen Zahlenmenge oder auch die uneigentlichen unendlichen Grenzwerte ergeben können. Auch in diesem Fall helfen Techniken der Faktorisierung oft weiter. Wir wandeln das zuletzt gerechnete Beispiel vordergründig geringfügig ab:

Beisp: *(Der Fall 0 durch 0)*

Berechne a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3+6x^2-x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-4x^2+2x}{x^3+6x^2-x-6}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3}{-3x^3+6x^2-3x}$

In allen drei Fällen ergibt sich beim ersten Einsetzen der Fall $\dfrac{0}{0}$; im Einzelnen:

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3+6x^2-x-6} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+6)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+6)} = \frac{1}{7}$$

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3-4x^2+2x}{x^3+6x^2-x-6} = \lim_{x\to 1} \frac{2x\cdot(x^2-2x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+6)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x\cdot(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+6)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x+6)} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-x^3}{-3x^3+6x^2-3x} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3\cdot(x-1)}{-3x\cdot(x^2-2x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2\cdot(x-1)}{-3\cdot(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{-3\cdot(x-1)}$$

Also hat sich hinter dieser Aufgabe der Fall “feste Zahl ($\neq 0$) dividiert durch 0" verborgen. Mögliche Werte der dabei auftreteden einseitigen uneigentlichen Grenzwerte sind ∞ oder $-\infty$.

Man errechnet: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2}{-3\cdot(x-1)} = \infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2}{-3\cdot(x-1)} = -\infty$

Wir stellen noch fest, dass mit Überlegungen zum Fall “$\dfrac{0}{0}$” auch der Fall “$\infty \cdot 0$" behandelt ist

Eine letzte Überlegung zur praktischen Grenzwertberechnung gilt dem Fall, dass eine beschränkte Funktion, also eine Funktion deren Werte im Betrag immer unter einer bestimmten Grenze bleiben, von anderen in eine gewisse Richtung “gezwungen “ werden können.

Beisp: *(Grenzwerte in Zusammenhang mit beschränkten Funktionen)*

Berechne $\lim\limits_{x\to 2} (x-2)^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$

Da jeder sin-Wert zwischen -1 und 1 liegt, gilt auch hier: $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) \leq 1$.

Also ist $(x-2)^2\cdot(-1) \leq (x-2)^2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x-2}\right) \leq (x-2)^2\cdot 1$ und damit auch

$$\lim_{x\to 2} (x-2)^2\cdot(-1) \leq \lim_{x\to 2} (x-2)^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq \lim_{x\to 2} (x-2)^2\cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \lim_{x\to 2} (x-2)^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2} (x-2)^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0$$