10. Rechenregeln der Integralrechnung

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stellt für eine auf einem Intervall [a,b] stetige Funktion f den Zusammenhang zwischen der Berechnung des Integrals der Funktion f auf [a,b] und der Differentialrechnung her. Um diesen Zusammenhang angemessen ausschöpfen zu können, fehlen uns noch Rechenregeln, mit deren Hilfe wir Stammfunktionen ermitteln, damit Integrale ausrechnen können. Auf der Suche nach Rechenregeln der Integralrechnung stellt sich angesichts des nachgewiesenen Zusammenhangs zwischen der Differential- und der Integralrechnung die Frage, ob man die Regeln der Differentialrechnung (Summenregel, Faktorregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) nicht entsprechend auf die Berechnung von Stammfunktionen anwenden kann.

10.1 Die Summen- und die Faktorregel der Integralrechnung

Im Kapitel zu Stammfunktionen ist die Summen- und Faktorregel bei der Stammfunktionsbildung bereits nachgewiesen; wir übertragen die Inhalte auf die Integralrechnung.

Satz: *(Summenregel der Integralrechnung)*

Sind f und g auf [a,b] definierte, stetige Funktionen mit Stammfunktionen F und G, dann ist die Funktion H:[a,b]→ℝ mit H(x) = (F+G)(x) = F(x) + G(x) Stammfunktion zur Funktion h:[a,b]→ℝ mit der Gleichung h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x), und es gilt:

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Bew:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \Big[F+G\Big]_a^b = (F+G)(b) - (F+G)(a) =$$

$$F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) =$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Achtung! Man kann zwar nach der Summenregel von der Existenz von Stammfunktionen der Funktionen f und g auf die Existenz von Stammfunktionen der Funktion (f+g) schließen, aber umgekehrt kann man nicht sagen, dass aus der Existenz einer Stammfunktion H zur Funktion h=(f+g) die Existenz von Stammfunktionen F und G zu f und g zu folgern wäre. Dazu ein Beispiel:

Beisp: *(Funktionen ohne Stammfunktion, deren Summe eine Stammfunktion besitzt)*

Gegeben sind die Funktionen f und g über ihre Gleichungen:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ -1 & x>0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 2 & x>0 \end{cases}$$

f und g besitzen beide - ähnlich wie die im Zusammenhang mit Stammfunktionen bereits erwähnte sign-Funktion - keine Stammfunktion. Die Funktion h=f+g besitzt aber Stammfunktionen H, weil h(x) = (f+g)(x) = 1 für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit H(x) = x + C.

Satz: *(Faktorregel der Integralrechnung)*

Ist f eine auf [a,b] definierte, stetige Funktion mit Stammfunktionen F, dann ist die Funktion $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $H(x) = (c\cdot F)(x) = c\cdot F(x)$ Stammfunktion zur Funktion $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit der Gleichung $h(x) = (c\cdot f)(x) = c\cdot f(x)$, und es gilt:

$$\int_a^b c\cdot f(x)\ dx = c\cdot\int_a^b f(x)\ dx$$

Bew:
$$\int_a^b c\cdot f(x)\ dx = \int_a^b (c\cdot f)(x)\ dx = \big[(c\cdot F)(x)\big]_a^b =$$
$$c\cdot F(b) - c\cdot F(a) = c\cdot(F(b) - F(a)) = c\cdot\int_a^b f(x)\ dx$$

Die Inhalte der Summen- und Faktorregel der Integralrechnung sind nicht überraschend. Die Überleitungen der andere Rechenregeln der Differentialrechnung in die Integralrechnung führt jedoch zu ungewohnten Rechenwegen.

10.2 Die Regel der Produktintegration (Regel der partiellen Integration)

Die Regel der partiellen Integration ist eine Entsprechung der Produktregel der Differentialrechnung. Entsprechend starten wir ihre Herleitung:

(1) Die Produktregel der Differentialrechnung sagt für zwei auf I=[a,b] differenzierbare Funktionen f und g aus, dass auch die Funktion h mit $h(x) = (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ auf [a,b] differenzierbar ist und dass gilt

$$h'(x) = (f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x) \quad \text{für alle } x\in[a,b]$$

(2) Man bildet nun auf beiden Seiten dieser Gleichung das Integral über die auftretenden Funktionen im Intervall [a,b] und erhält für alle $x\in[a,b]$:

$$\int_a^b (f\cdot g)'(x)\ dx = \int_a^b \big(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\big)\ dx$$

Diese Anwendung des Integrals auf beiden Seiten der Gleichung zur Produktregel ist zulässig, denn nach der Produktregel der Differentialrechnung weiß man, dass $(f\cdot g)'$ eine Stammfunktion, nämlich $f\cdot g$, besitzt und deshalb die Integral-Anwendung sinnvoll ist. Also ist:

$$\big[(f\cdot g)(x)\big]_a^b = \int_a^b \big(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\big)\ dx$$

(3) Falls die Ableitungsfunktionen f´ und g´ auf [a,b] stetig sind, dann sind auch die Funktionen $f'\cdot g$ und

$g' \cdot f$ stetig, und man kann unter Berufung auf die Summeregel der Integralrechnung weiter umformen:

$$\Big[(f\cdot g)(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\big)\, dx = \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, dx$$

Eine Umordnung der so ermittelten Integralgleichung ergibt die Regel der partiellen Integration:

Satz: *(Regel der partiellen Integration)*

Sind f und g zwei auf dem Intervall [a,b] stetig differenzierbare Funktionen, also auf [a,b] differenzierbare Funktionen mit dort stetiger Ableitungsfunktion, dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\, dx = \Big[(f\cdot g)(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, dx$$

In Kurzschreibweise merkt man sich:

$$\int f'\cdot g = f\cdot g - \int f\cdot g'$$

Eine Bemerkung: Die Forderung nach der stetigen Differenzierbarkeit, die wir nach der Herleitung stellen mussten, ist keine unnötige Spitzfindigkeit. Es gibt tatsächlich Funktionen, die zwar eine Ableitung besitzen, deren Ableitungsfunktion aber nicht stetig ist.

Beisp: *(Eine differenzierbare, aber nicht stetig differenzierbare Funktion)*

Wir betrachten die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Für $x \neq 0$ berechnet die Ableitung nach den Rechenregeln der Differentialrechnung:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Zur Berechnung von $f'(0)$ wird mithilfe des Differenzenquotienten argumentiert:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Die Funktion f' ist an der Stelle x=0 unstetig, weil die Grenzwertbildung

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

nicht gelingt. Man vergleicht dazu ein ähnliches Beispiel aus dem Kapitel “Stammfunktionen”.

Zunächst ist unklar, welche Möglichkeiten die Regel der partiellen Integration bietet; deshalb stellen wir nun systematisch Beispielen ihrer Anwendung dar. Ziel einer Anwendung dieser Regel ist grundsätzlich, die Schwierigkeit des zu berechnenden Integrals herabzusetzen. Nach der obigen Formel: Das rechts entstehende Integral $\int f\, g'$ soll einfacher zu berechnen als $\int f'\, g$ links.

Beisp: *(Die einfache Anwendung der partiellen Integration)*

Berechne $\int_a^b x \cos(x)\, dx$.

Man fasst den Integranden des zu lösenden Integrals als einen Term der Form f´·g auf, indem man identifiziert g(x) = x, f´(x)=cos(x). Man bereitet die weitere Rechnung vor, indem man g´ als Ableitung von g und f als eine Stammfunktion von f´ bestimmt:

g(x) = x   g'(x) = 1   f´(x) = cos x   f(x) = sin x

Man erhält so:

$$\int_a^b x \cos(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, dx =$$

$$\left[x\cdot\sin(x)\right]_a^b - \int_a^b \sin(x)\cdot 1\cdot dx = \left[x\cdot\sin(x)\right]_a^b - \left[-\cos(x)\right]_a^b =$$

$$\left[x\cdot\sin(x) + \cos(x)\right]_a^b = b\cdot\sin(b) + \cos(b) - a\cdot\sin(a) - \cos(a)$$

Hätte man mit f´(x) = x und g(x) = x anders angesetzt, wäre der Einsatz der Regel der partiellen Integration unzweckmäßig gewesen, weil sich der entstehende Integralterm schwieriger als der ursprünglich zu berechnende erweist:

$f'(x) = x \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad g(x) = \cos(x) \qquad g'(x) = -\sin(x)$

$$\int_a^b x\cdot\cos(x)\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\cdot\cos(x)\right]_a^b - \int_a^b (-\sin(x))\cdot\frac{1}{2}x^2\, dx = ???$$

Beisp: *(Abbau von Potenzen durch mehrfache Anwendung der partiellen Integration)*

Berechne $\int_a^b (x^3+1)\cos(x)\, dx$.

Man wählt f´(x) = cos(x) und g(x) = x^3 +1, damit das entstehende Integral durch Minderung der Potenz bei x einfacher wird. Damit ist

f´(x) = cos(x)   f(x) = sin (x)   g(x) = x^3 +1   g´(x) = $3x^2$

Für das Integral ergibt sich nach Anwendung der Regel der partiellen Integration:

$$\int_a^b (x^3+1)\cdot\cos(x)\, dx = \left[(x^3+1)\cdot\sin(x)\right]_a^b - \int_a^b 3x^2\cdot\sin(x)\, dx =$$

$$\left[(x^3+1)\cdot\sin(x)\right]_a^b - 3\int_a^b x^2\cdot\sin(x)\, dx$$

Das entstandene Integral wird - wieder unter der Maßgabe, die Potenz bei x zu mindern - zunächst separat weiterberechnet, indem man setzt

f´(x) = sin(x) f(x) = -cos (x) g(x) = x^2 g´(x) = 2x

$$\int_a^b x^2 \cdot \sin(x)\, dx = \left[x^2 \cdot (-\cos(x))\right]_a^b - \int_a^b 2x\,(-\cos(x))\, dx =$$

$$\left[-x^2 \cdot \cos(x)\right]_a^b + 2\int_a^b x \cdot \cos(x)\, dx$$

Insgesamt ergibt sich so und unter Einbeziehung des vorangegangenen Beispiels:

$$\int_a^b (x^3+1)\cdot\cos(x)\; dx = \left[(x^3+1)\cdot\sin(x)\right]_a^b - 3\int_a^b x^2 \cdot \sin(x)\, dx =$$

$$\left[(x^3+1)\cdot\sin(x)\right]_a^b - 3\cdot\left(\left[-x^2\cdot\cos(x)\right]_a^b + 2\int_a^b x\cdot\cos(x)\, dx\right) =$$

$$\left[(x^3+1)\cdot\sin(x)\right]_a^b - 3\cdot\left(\left[-x^2\cdot\cos(x)\right]_a^b + 2\left[x\cdot\sin(x)+\cos(x)\right]_a^b\right) =$$

$$\left[(x^3+1)\cdot\sin(x) + 3\cdot x^2\cdot\cos(x) - 6x\cdot\sin(x) - 6\cos(x)\right]_a^b$$

Das folgende Verfahren bietet sich an, wenn man außer der Ableitung der zu integrierenden Funktion nur wenig über sie weiß.

Beisp: *(Die Verwendung des Faktors 1 im Zusammenhang mit partieller Integration)*

Wir betrachten die auf]0,∞[definierte Funktion L mit der Gleichung $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

Diese Funktion ist Stammfunktion der Kehrwertfunktion, für die wir keinen integralfreien Term kennen; es ist also $L'(x) = \frac{1}{x}$

L ist, weil Stammfunktion, differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich, also auch stetig dort. Folglich hat die Funktion ihrerseits Stammfunktionen, und man kann Integrale über die Funktion L berechnen. Man verwendet für den Ansatz der Berechnung den Faktor 1:

$$\int_a^b L(x)\, dx = \int_a^b 1\cdot L(x)\, dx$$

Für die weitere Behandlung mit der Regel der partiellen Integration rechnet man:

$f'(x) = 1$ $f(x) = x$ $g(x) = L(x)$ $g'(x) = L'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_a^b 1\cdot L(x)\,dx = \left[x\cdot L(x)\right]_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left[x\cdot L(x)\right]_a^b - \int_a^b 1\cdot dx = \left[x\cdot L(x) - x\right]_a^b$$

Beisp: *(Das Ausgangsintegral entsteht nach partieller Integration wieder)*

Berechne $\int_a^b \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$

Die Regel der partiellen Integration wird angewendet:

f´(x) = cos x f(x) = sin x g(x) = sin x g´(x) = cos x

$$\int_a^b \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = \left[\sin(x) \cdot \sin(x)\right]_a^b - \int_a^b \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$$

Man formt die entstandene Gleichung um und erhält die Lösung der Integralaufgabe:

$$2 \cdot \int_a^b \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = \left[\sin(x) \cdot \sin(x)\right]_a^b \Rightarrow \int_a^b \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\sin^2(x)\right]_a^b$$

Beisp: *(Man erhält durch partielle Integration eine Formel)*

Berechne $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$

Man formt um $\sin^n(x) = \sin(x) \cdot \sin^{n-1}(x)$ und setzt zur partiellen Integration an:

f´(x) = sin (x) f(x) = -cos (x) g(x) = $\sin^{n-1}(x)$ g´(x) = (n-1) · $\sin^{n-2}(x)$ · cos (x)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \sin^{n-1}(x)\, dx =$$

$$\left[-\cos(x) \cdot \sin^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x) \cdot (n-1) \cdot \sin^{n-2}(x) \cdot \cos(x)\, dx =$$

$$0 - 0 + (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \cdot \sin^{n-2}(x)\, dx = (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \cdot \sin^{n-2}(x)\, dx =$$

$$(n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\, dx - (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x))\, dx$$

$$0 - 0 + (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \cdot \sin^{n-2}(x)\, dx = (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \cdot \sin^{n-2}(x)\, dx =$$

$$(n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\, dx - (n-1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x))\, dx$$

Das Ergebnis der bisherigen Rechnungen wird festgehalten und weiter umgeformt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = (n-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx - (n-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x))\,dx \Leftrightarrow$$

$$n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = (n-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx$$

Bei Anwendung mit konkreten Zahlen erkennt man den Nutzen der gefundenen Formel:

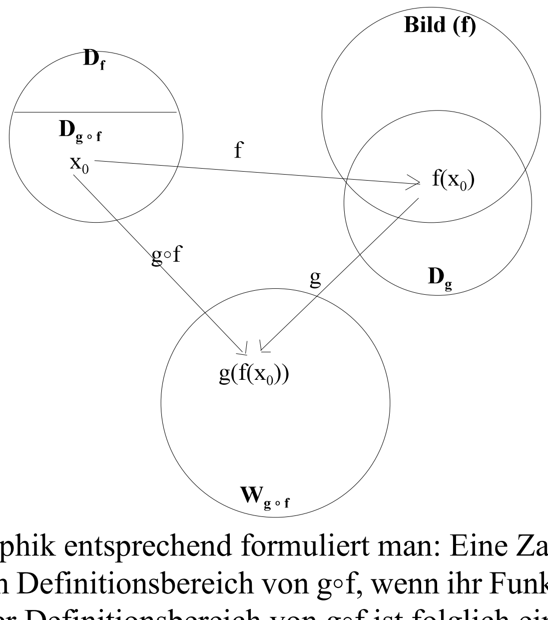
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)\,dx = \frac{4}{5}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx =$$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\Big[-\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}\cdot(0-(-1)) = \frac{8}{15}$$

Die Anwendungsmöglichkeiten der Technik der partiellen Integration beruhen darauf, dass man Integrale von Funktionen h der Form $h(x) = f'(x)\cdot g(x)$ geschickt erkennt und auf Integrale von Funktionen j der Form $j(x) = f(x)\cdot g'(x)$ transformiert. Es lohnt sich nicht, vergleichbar eine Übertragung der Quotientenregel auf die Integralrechnung zu suchen, weil es wohl kaum möglich ist, in einem Funktionsausdruck einen Term der Bauart $\frac{f(x)\,\cdot\,g'(x)}{g^2(x)}$, der lohnend auf $\frac{f'(x)\,\cdot\,g(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)}{g(x)}$ transformiert werden könnte, zu sichten.

10.3 Die Substitutionsregel

Die Substitutionsregel der Integralrechnung lässt sich aus der Kettenregel der Differentialrechnung, der Ableitungsregel für die Hintereinanderausführung von Funktionen, herleiten. Die Graphik zeigt, unter welchen Umständen im Allgemeinen die Hintereinanderausführung $g\circ f$ (lies: g nach f) gelingt:



Der Graphik entsprechend formuliert man: Eine Zahl $x_0 \in D_f$ ist unter der Funktion $g\circ f$ abbildbar und liegt damit im Definitionsbereich von $g\circ f$, wenn ihr Funktionswert $f(x_0)$ im Definitionsbereich D_g der Funktion g liegt. Der Definitionsbereich von $g\circ f$ ist folglich eine Teilmenge von D_f.

Nun wird die Substitutionsregel der Integralrechnung hergeleitet:

(1) Die Kettenregel der Differentialrechnung besagt im oben dargestellten Zusammenhang:

Ist f eine an der Stelle x_0 differenzierbare Funktion, ist weiter der Durchschnitt des Bildes der Funktion f und des Definitionsbereiches der Funktion g nicht gleich der leeren Menge und enthält die Zahl $f(x_0)$ und ist die Funktion g an der Stelle $y_0=f(x_0)$ differenzierbar, dann ist auch die Hintereinanderausführung $g \circ f$ an der Stelle x an der Stelle x_0 differenzierbar, und es gilt:

$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$

Gilt diese Aussage für alle $x \in D_{g \circ f}$, dann erhält man folgende Ableitungsfunktion

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$

(2) Wenn $g \circ f$ auf einem Intervall [a,b] definiert ist, darf diese Gleichung auf beiden Seiten integriert werden, weil (g o f)' eine Stammfunktion, nämlich g o f, besitzt:

$$\int_a^b (g \circ f)'(x)\, dx = \int_a^b g'(f(x))\, f'(x)\, dx$$

(3) Man vertauscht die Seiten und formt weiter um:

$$\int_a^b g'(f(x))\, f'(x)\, dx = \int_a^b (g \circ f)'(x)\, dx = \Big[(g \circ f)(x)\Big]_a^b = g(f(b)) - g(f(a)) =$$

$$\Big[g(t)\Big]_{f(a)}^{f(b)} = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(t)\, dt$$

(4) Die Umformungen in (3) haben einen Zusammenhang ergeben, der den Term der Funktion g nicht mehr, den von g´ aber noch enthält. Wir benennen - lediglich aus Gründen der Optik - die Funktion g´ deshalb um in h:

$$\int_a^b g'(f(x))\, f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g'(t)\, dt \Leftrightarrow \int_a^b h(f(x))\, f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} h(t)\, dt$$

Die Herleitung gipfelt in folgendem Satz:

Satz: *(Substitutionsregel)*

Ist $f:[a,b] \to [c,d]$ eine stetig differenzierbare Funktion und h eine auf dem Intervall [c,d] stetige Funktion, dann gilt:

$$\int_a^b h(f(x))\, f'(x)\, dx = \int_{f(a)}^{f(b)} h(t)\, dt$$

Die Bezeichnung “Substitutionsregel” bedeutet Ersetzungsregel; ihr Name wird deutlich, wenn man sich das übliche Rechenverfahren zu ihrer Anwendung vor Augen führt, welches f(x) durch t ersetzt und mit den Differentialen dx und dt in der Schreibweise nach LEIBNIZ umgeht.

Bem: *(Durchführung der Substitutionsregel)*
Man setzt $f(x) = t \Rightarrow f'(x) = \dfrac{dt}{dx} \Leftrightarrow f'(x) \cdot dx = dt$
und errechnet anschließend die "neuen" Grenzen.

Die im Satz zur Substitutionsregel festgestellte Formel kann in zwei Richtungen gelesen werden; entsprechend sind die folgenden Anwendungsbeispiele gegliedert

Beisp: *(Die einfache Anwendung der Substitutionsregel "von links nach rechts")*

Berechne $\int\limits_a^b \sin(x^3) \cdot 3x^2\, dx$

Bei Anwendung der Substitutionsregel "von links nach rechts" sucht man im Funktionsterm, über den das Integral gebildet werden soll, zwei Teil-Terme, von denen einer multiplikativ angeschlossen und Ableitung des anderen ist. In der Aufgabe hier ist ein solches Term-Paar durch $f(x) = x^3$ und $f'(x) = 3x^2$ gegeben. Man bereitet die Substitution entsprechend vor:

$f(x) = x^3 = t$ $\quad f'(x)\, dx = 3x^2\, dx = dt$ $\quad x{=}a \Rightarrow x^3 = t = a^3$ $\quad x{=}b \Rightarrow x^3 = t = b^3$

$$\int\limits_a^b \sin(x^3) \cdot 3x^2\, dx = \int\limits_{a^3}^{b^3} \sin(t)\, dt = \Big[-\cos(t)\Big]_{a^3}^{b^3} = -\cos(b^3) + \cos(a^3)$$

Beisp: *(Die Verwendung geeigneter Faktoren, um zu einer naheliegenden Anwendung der Substitution "von links nach rechts" zu gelangen)*

Berechne $\int\limits_a^b x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\, dx$

Hier ist unmittelbar kein passendes Termpaar f(x) / f′(x) zu erkennen. Hätte man jedoch vor der Wurzel statt dem Faktor x den Faktor 2x, könnte dieses Beispiel wie das vorige abgewickelt werden. Unter Ausnutzung der Faktorregel der Integralrechnung rechnet man dann:

$$\int\limits_a^b x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\, dx = \int\limits_a^b \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_a^b 2x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\, dx$$

Die Durchführung der Substitution ergibt:

$x^2 + 3 = t$ $\quad 2x\, dx = dt$ $\quad x = a \Rightarrow t = a^2 + 3$ $\quad x = b \Rightarrow t = b^2 + 3$

$$\int\limits_a^b x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_a^b 2x \cdot \sqrt{x^2 + 3}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{a^2+3}^{b^2+3} \sqrt{t}\, dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}}\right]_{a^2+3}^{b^2+3} =$$

$$\frac{1}{3}(b^2 + 3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(a^2 + 3)^{\frac{3}{2}}$$

Günstige Substitutionen bei der Anwendung der Substitutionsregel von links nach rechts findet man auch, wenn man spezielle Ableitungsformeln erkennt:

Beisp: *(Verwendung von Kenntnissen über Ableitungsformeln)*

Berechne $\int_2^7 \frac{4x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

Man stellt eine Ähnlichkeit zur Ableitungsfaustregel "Ableitung der Wurzel = Eins durch zweimal Wurzel" fest, weil der Wurzelterm im Nenner des Integranden steht. Deshalb versucht man - wie sich herausstellt erfolgreich - folgende Substitution:

$$t = \sqrt{x+2} \qquad dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+2}}\,dx \qquad x = 2 \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2 \qquad x = 7 \Rightarrow t = \sqrt{9} = 3$$

Unter Verwendung der im vorherigen Beispiel vorgestellten Faktorergänzung und der aus der Umkehrung der Substitution resultierenden Setzung $x = t^2 - 2$ findet man:

$$\int_2^7 \frac{4x}{\sqrt{x+2}}\,dx = \int_2^7 \frac{2 \cdot 4x}{2 \cdot \sqrt{x+2}}\,dx = 8 \cdot \int_2^7 \frac{x}{2 \cdot \sqrt{x+2}}\,dx = 8 \cdot \int_2^3 (t^2 - 2)\,dt =$$

$$8 \cdot \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t\right]_2^3 = 8 \cdot \left(3 - \left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{104}{3}$$

Komplizierter ist die Anwendung der Substitutionsregel von rechts nach links; oft wirken hier die Substitutionen an den Haaren herbeigezogen, und offenbaren ihren Sinn erst, nachdem die Rechnung vollzogen ist. Um solche Substitutionen zu finden, muss man ein gutes Gespür entwickelt haben; oft findet man passende Tricks, wenn man die Ähnlichkeit der zu integrierenden Funktion zu verschiedenen mathematischen Formeln erkennt und ausnützt.

Beisp: *(Ein Integral mit trigonometrischen Funktionen)*

Berechne $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$

Für den sin und cos irgendeines Bogens φ gilt: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. Ist $\varphi \in [0,\pi/2]$, kann man diese Formel nach sin (φ) auflösen:

$$\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$$

Man erkennt eine Strukturähnlichkeit zum Integranden des zu berechnenden Integrals und setzt eine entsprechende Substitution an; dabei wird mit “arccos” die Umkehrfunktion der cos-Funktion im betrachteten Intervall bezeichnet.

$x = \cos(\varphi) \quad dx = -\sin(\varphi)\,d\varphi \quad \varphi = \arccos(x)$

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_{\arccos(0)}^{\arccos(1)} \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} \cdot (-\sin(\varphi))\,d\varphi = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\,d\varphi$$

Das entstandene Integral über die Funktion $\sin^2$ ist mit partieller Integration berechenbar:

f´(φ) = sin (φ) f(φ) = -cos (φ) g(φ) = sin (φ) g´(φ) = cos (φ)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\, d\varphi = \left[-\cos(\varphi)\sin(\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(\varphi)\cos(\varphi)\, d\varphi = 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\varphi)\, d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(\varphi))\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\, d\varphi$$

Also ist das Ausgangsintegral wieder entstanden; es folgt:

$$2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Beisp: *(Ein Integral im Zusammenhang mit der tan-Funktion)*

Berechne $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$

Eine Formel zur Ableitung der Tangensfunktion ist: tan´(x) = 1 + $\tan^2$ (x). Auch diese Formel lässt sich zum Auffinden einer Substitution und damit zu einer verblüffend einfachen Lösung nützen; unter dem unten verwendeten Funktionsnamen “arctan” verbirgt sich die Umkehrfunktion der tan-Funktion.

x = tan u dx = (1+$\tan^2$(u)) du u = arctan (x)

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \int_{\arctan(0)}^{\arctan(1)} \frac{1}{1 + \tan^2(u)} (1 + \tan^2(u))\, du =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} du = \left[u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

10.4 Integrale gebrochenrationaler Funktionen (Vorschau)

Integrale gebrochenrationaler Funktionen werden ermittelbar, wenn man den Funktionsterm geeignet behandelt. Dabei bewährt sich folgendes Schema:

Schritt 1 Zerlegung des Funktionsterms in einen ganzrationalen und einen echt gebrochenrationalen Anteil. Der ganzrationale Anteil lässt sich einfach integrieren.

Schritt 2 Im echt gebrochenrationalen Anteil wird das Nennerpolynom als Produkt linearer und quadratischer Faktoren dargestellt. Die benötigten Techniken (Ausklammern, binomische Formeln, Polynomdivision, Ansatzlösung mit Koeffizientenvergleich) sind in Kapitel 6 zusammengestellt.

Schritt 3 Durch Partialbruchzerlegung wird der echt gebrochenrationale Anteil aufgespalten in eine Summe aus echt gebrochenrationalen Termen, die im Nenner lineare beziehungsweise quadratische Terme führen.

Schritt 4 Die Integration der Summanden, die sich nach der Partialbruchzerlegung ergeben haben, lassen sich - gegebenenfalls durch geeignete Substitutionen - auf folgende Fälle zurückführen:

f(x)	F(x)
$\frac{1}{x-a}$	$\ln(\lvert x-a \rvert)$
$\frac{1}{(x-a)^n}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$\frac{1}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}$
$\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$	$\ln(\lvert x^2+bx+c \rvert)$ (vergl. Kap. 13)
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan(x)$

Beisp: *(Integration gebrochenrationaler Funktionen)*

Berechne eine Stammfunktion zur Funktion f mit $f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}$

Schritt 1 Der Funktionsterm dieser Funktion weist im Zähler ein Polynom fünften, im Nenner ein Polynom sechsten Grades auf, ist also bereits echt gebrochenrational. Eine Zerlegung ist nicht nötig.

Schritt 2 Der Nenner ist bereits als Produkt linearer und quadratischer Terme geschrieben; auch die Durchführung dieses Schrittes ist hier nicht nötig.

Schritt 3 — Im Kapitel 6 ist die Partialbruchzerlegung dieser Funktion bereits ermittelt worden:

$$f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{x-1}{x^2+2} + \frac{4x}{(x^2+2)^3}$$

Schritt 4 — Die Integration folgt folgendem Ansatz:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx + \int \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx =$$

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2}\,dx + \int \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$$

Das erste dieser drei Integrale errechnet sich mit logarithmischer Integration:

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2)$$

Das zweite Integral erfordert eine Substitution ($x = \sqrt{2}u$, $dx = \sqrt{2}\,du$) und führt dann auf die arctan-Funktion:

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \int \frac{1}{2u^2+2}\cdot\sqrt{2}\,du = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\int \frac{1}{u^2+1}\,du =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan(u) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Das dritte Integral wird gelöst durch Anwendung der Substitutionsregel ($u = x^2 + 2$, $du = 2x\,dx$):

$$\int \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx = 2\cdot\int \frac{2x}{(x^2+2)^3}\,dx = 2\cdot\int \frac{1}{u^3}\,dx = -\frac{1}{u^2} = \frac{-1}{(x^2+2)^2}$$

Die Zusammenfassung ergibt die Lösung der gestellten Aufgabe:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{(x^2+2)^2}$$