7. Stammfunktionen

Man weiß: Für differenzierbare Funktionen f gibt $f'(x_0)$, die Ableitung von f an der Stelle x_0, die Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0 an. Diejenige Funktion, die jedem x, für das die Funktion f differenzierbar ist, die Ableitung $f'(x)$ zuweist, heißt Ableitungsfunktion f'.

Beisp: *(Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion)*

Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^7 + 12x$ ($x \in \mathbb{R} = D_f$) hat die Ableitungsfunktion f' mit

$f'(x) = 7x^6 + 12$ ($x \in \mathbb{R} = D_{f'}$).

Wir wollen nun umgekehrt überlegen: Gegeben ist eine Funktion f, die Ableitungsfunktion einer unbekannten Funktion F sein soll; wie lautet also die Gleichung von F, wenn $F' = f$ sein soll?

Beisp: *(Umkehrung der Ableitung einer Polynomfunktion)*

Zur Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3x^2$ ($x\in\mathbb{R}$) ist die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = x^3$ ($x\in\mathbb{R}$) eine mögliche Funktion, für die gilt: $F' = f$. Aber auch für die Funktion G mit der Gleichung $G(x) = x^3 + 13$ ($x\in\mathbb{R}$) gilt $G' = f$. Die Bildung der "Anti-Ableitung" ist also nicht eindeutig.

Hinter diesen Überlegungen steht ein zentraler Begriff der Differential- und Integralrechnung

Def: *(Stammfunktion)*

Eine Funktion $F: D\to\mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu $f:D\to \mathbb{R}$ genau dann, wenn:

- *F eine für alle $x\in D$ differenzierbare Funktion ist*
- *$F'(x) = f(x)$ für alle $x\in D$*

Die folgende Tabelle zeigt mögliche Stammfunktionen F zu bekannten Funktionen f:

Beisp: *(Stammfunktionen gängiger Funktionen)*

f(x)	F(x)	Bemerkungen
c	cx + C	c, $C\in\mathbb{R}$
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	$r\in Q\setminus\{-1\}$, $C\in\mathbb{R}$
sin (x)	-cos (x) + C	$C\in\mathbb{R}$
cos (x)	sin (x) + C	$C\in\mathbb{R}$

Nach den einführenden Betrachtungen zu Stammfunktionen können wir den folgenden Satz vermuten und beweisen:

Satz: *(Herleiten verwandter Stammfunktionsterme durch Anhängen einer additiven Konstante)*

Ist eine Funktion F Stammfunktion der Funktion f, dann ist auch die Funktion F_1 mit der Gleichung $F_1(x) = F(x) + C$ ($C \in \mathbb{R}$) Stammfunktion zu f.

Bew: Es ist zu überprüfen, ob unter den gestellten Voraussetzungen

1.) F_1 differenzierbar ist für alle $x \in D$ 2.) $F_1'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$

zu 1.) F ist nach Voraussetzung eine Stammfunktion zu f, also differenzierbar. Auch die Funktion $g{:}D \to \mathbb{R}$ mit der Gleichung $g(x)=c$ ist eine differenzierbare Funktion mit der Ableitungsfunktion g'; deren Funktionsgleichung lautet $g'(x) = 0$.

Da die Summe zweier differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist, ist auch die Funktion F_1 mit der Gleichung $F_1(x) = F(x)+g(x) = F(x)+c$ differenzierbar.

zu 2.) Die Ableitung ergibt nach der Summenregel der Differentialrechnung:

$$F_1'(x) = (F + g)'(x) = F'(x) + g'(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

Also ist F_1 Stammfunktion von f.

Der eben bewiesene Satz hat nicht geklärt, ob tatsächlich alle Stammfunktionen zu einer Funktion f durch Anhängen einer Konstante an eine zufällig gefundene Stammfunktion ermittelt werden können. Es ist damit folgende Frage offen: Wenn F_1 und F_2 zwei verschiedene Stammfunktionen zu einer Funktion f sind, kann man dann für alle $x \in D$ und ein bestimmtes $c \in \mathbb{R}$ schreiben: $F_1(x) = F_2(x) + c$? Die Antwort lautet "Nein":

Beisp: *(Stammfunktionen, die nicht durch Addition einer festen Konstante c auseinander hervorgehen)*

Gegeben ist die Funktion f:

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x^2}$$

Folgende Funktionen sind Stammfunktionen zu f:

$$F_1\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{-1}{x} \qquad F_2\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{-1}{x} + 7$$

$$F_3\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-1}{x} & x<0 \\[2ex] \dfrac{-1}{x} + 7 & x>0 \end{cases}$$

Es gibt aber zum Beispiel keine Zahl $c \in R$, für die gilt $F_1(x)+c = F_3(x)$ für alle $x \in D$.

Die Betrachtung des eben abgehandelten Beispiels, bei dem offenbar der an der Stelle x=0 durchbrochene

Definitionsbereich zu den etwas unerwarteten Schwierigkeiten führte, führt zu der Vermutung, dass folgender Satz richtig sein könnte:

Satz: *(Bestimmung von Stammfunktionen, die durch Addition einer additiven Konstante auseinander hervorgehen)*

Sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen einer ***auf einem Intervall I definierten*** *Funktion f, dann unterscheiden sie sich nur durch eine additive Konstante.*

Bew: $F_1, F_2: I \to \mathbb{R}$ seien zwei beliebige Stammfunktionen zu f. Zu zeigen ist: $F_2(x) = F_1(x) + c$ für alle $x \in I$

Dazu betrachtet man die Differenzfunktion H der beiden Stammfunktionen mit der Gleichung:

$H(x) = F_2(x) - F_1(x)$ für alle $x \in I$

H ist als Differenz differenzierbarer Funktionen differenzierbar, und es gilt für alle $x \in I$:

$H'(x) = (F_2 - F_1)'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$H = F_2 - F_1$ hat also für alle $x \in I$ die Nullfunktion als Ableitungsfunktion.

Im Allgemeinen sind die Funktionen f, deren Ableitung immer 0 ist, gerade die konstanten Funktionen mit der Gleichung $f(x) = c$ ($c \in \mathbb{R}$). Dass es nur diese sind, folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, der jetzt nur aus Gründen der korrekten Begründung erwähnt wird, dessen Beweis aber unterbleibt.

Man folgert aus dem allgemeinen Ergebnis, dass

$H(x) = F_2(x) - F_1(x) = c$ für alle $x \in I \Rightarrow F_2(x) = F_1(x) + c$ für alle $x \in I$

Mit Hilfe einiger einfacher Regeln kann man weitere als die wenigen oben genannten Stammfunktionen angeben:

Satz: (*Summenregel der Stammfunktionsbestimmung)*

Sind f und g zwei Funktionen mit Stammfunktionen F und G, dann ist die Summenfunktion F+G Stammfunktion zur Summenfunktion f+g.

Bew: Da der Satz bereits voraussetzt, dass F und G Stammfunktionen zu f und g sind, sind beide differenzierbar, und es gilt nach der Summenregel der Differentialrechnung:

$(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$

Satz: *(Faktorregel bei der Stammfunktionsbestimmung)*

Ist c eine reelle Zahl und f eine Funktion mit Stammfunktion F, dann ist die Funktion c·F Stammfunktion zu c·f.

Bew: F ist als Stammfunktion von f differenzierbar. Nach der Faktorregel der Differentialrechnung gilt:

$$(c\cdot F)'(x) = c\cdot F'(x) = c\cdot f(x)$$

Andere Regeln der Differentialrechnung haben auch ihre Entsprechung bei der Stammfunktionsbestimmung; die entsprechenden Rechentechniken werden in einem gesonderten Kapitel behandelt werden. Einen Spezialfall ziehen wir jedoch bereits vor:

Satz: *(Stammfunktion zu f(ax+b))*

Sind a und b reelle Zahlen, f eine Funktion mit Stammfunktion F und g eine Funktion mit der Gleichung g(x) = ax + b, dann besitzt die Hintereinanderausführung h = f ∘ g mit der Gleichung h(x) = (f∘g)(x) = f(g(x)) = f(ax+b) auf ihrem Definitionsbereich ebenfalls eine Stammfunktion H, für deren Gleichung gilt:

$$H(x) = \frac{1}{a}\,F(ax+b)$$

Bew: H ist als Hintereinanderausführung differenzierbarer Funktionen differenzierbar; die Ableitung ergibt nach der Kettenregel und der Faktorregel der Differentialrechnung:

$$H'(x) = \left(\frac{1}{a}\,F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Beisp: *(Stammfunktionen verschiedener zusammengesetzter Funktionen)*

Die Tabelle zeigt einige Beispiele von Funktionen mit je einer Stammfunktion:

f(x)	F(x)	Bemerkungen
$3x^2 + \cos x$	$x^3 + \sin x + C$	$C\in\mathbb{R}$
$\sin(2x + 4\pi)$	$-\frac{1}{2}\cos(2x+4\pi) + C$	$C\in\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b, C\in\mathbb{R}$

Wir haben sehen können, dass man durch Addition von Konstanten c leicht unendlich viele Stammfunktionen von Funktionen f, die auf einem Intervall I definiert sind, finden kann. Wir wenden uns nun der Frage zu, wie man aus der unendlich großen Masse möglicher Stammfunktionen bestimmte identifizieren kann. Eine Möglichkeit zeigen das nachfolgende Beispiel und der dazugehörende Satz auf:

Beisp: *(Auffinden spezieller Stammfunktionen)*

Die Funktion f hat die Gleichung $f(x) = 6x^2 - x + 1$. Bestimme Stammfunktionen F zu f, deren Graph durch den Punkt P(2/10) verläuft!

Irgendeine Stammfunktion zu f hat die Gleichung

$$F(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

Setzt man in diese Form die Koordinaten des Punktes P ein, ergibt sich:

$F(2) = 10 \Leftrightarrow 16 - 2 + 2 + c = 10 \Leftrightarrow c = -6$

Wir haben mit der Einsetzung c=-6 genau eine Stammfunktion mit der geforderten Eigenschaft gefunden.

Die Lösung des Beispiels hat darauf hingedeutet, dass es kein Zufall war, dass genau eine Stammfunktion durch die geforderte Eigenschaft herausgefiltert werden konnte. Es gilt:

Satz: *(Auffinden spezieller Stammfunktionen)*

Ist $f{:}I\to\mathbb{R}$ eine auf einem Intervall definierte Funktion, welche Stammfunktionen besitzt, und ist - $x_0\in I$, $y_0\in\mathbb{R}$, dann gibt es genau eine Stammfunktion F, deren Graph den Punkt $P(x_0,/\, y_0)$ enthält, für die also gilt: $F(x_0) = y_0$

Bew: Die Beweisbehauptung formuliert zwei allgemein mathematisch wichtige Aussagen:

Die *Existenz*aussage: Es gibt eine Stammfunktion, welche die Anforderungen erfüllt.
Die *Eindeutigkeit*saussage: Es gibt nur eine Funktion, welche die Anforderungen erfüllt.

f besitzt nach Voraussetzung des Satzes Stammfunktionen. Ist F^* irgendeine Stammfunktion von f, dann hat jede andere Stammfunktion F eine Gleichung der Form $F(x)=F^*(x)+c$ ($c\in\mathbb{R}$), weil f auf einem Intervall definiert ist.

Der Punkt (x_0,y_0) soll auf dem Graph von F liegen; also ist $y_0 = F(x_0) = F^*(x_0) + c$. Daraus errechnet man $c = y_0 - F^*(x_0)$. Auf diese Weise ist ein c bestimmt, die Existenzfrage also beantwortet. Dieses c ist auch eindeutig, denn y_0 ist eine eindeutige Zahl und $F^*(x_0)$ ist ebenfalls eine eindeutige Zahl, weil F^* eine Funktion ist.

Auf der Suche nach charakteristischen Eigenschaften von Stammfunktionen untersuchen wir nun zunächst anhand von Beispielen die Frage, ob es denn zu jeder Funktion f eine Stammfunktion F gibt. Die Antwort lautet “Nein”:

Beisp: *(Eine Funktion ohne Stammfunktion)*

$$f(x) = sign\ x = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

Als Stammfunktionen F zu f kommen Funktionen der folgenden Form in Frage:

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & x>0 \\ c_2 & x=0 \\ -x + c_3 & x<0 \end{cases}$$

Solche Funktionen sind aber alle an der Stelle x=0 nicht differenzierbar, weil dort die links- und die rechtsseitige Steigung Stelle nicht übereinstimmen; deshalb ist F auch nicht differenzierbar, kann also keine Stammfunktion der sign-Funktion sein.

Man könnte auf die Idee kommen, dass die sign-Funktion keine Stammfunktion besitzt, weil sie nicht stetig ist. Mit dieser Vermutung liegt man nicht richtig; das folgende Beispiel klärt das mögliche Missverständnis.

Beisp: *(Eine unstetige Funktion mit Stammfunktion)*

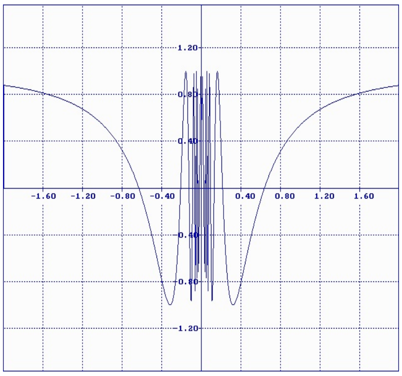
Man betrachtet folgende Funktionen:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Die Funktion f ist an der Stelle 0 nicht stetig, weil $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ eine unzulässige Grenzwertbildung symbolisiert; man sagt: Der Grenzwert existiert nicht.

Der Graph der Funktion h mit der Gleichung $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ verdeutlicht die Unmöglichkeit der Grenzwertbildung.



Trotzdem ist die Funktion F Stammfunktion zu f. Zum Beweis zeigen wir, dass F eine auf ℝ differenzierbare Funktion ist, für die gilt: $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wenn $x \neq 0$, dann ist F als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und nach den Regeln der Differentialrechnung ableitbar; es ergibt sich, wie man selbständig nachrechnen kann: $F'(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$. An der noch zu untersuchenden Stelle $x=0$ bestimmt man die Ableitung mit Hilfe der Definition der Differenzierbarkeit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = F'(0) = f(0)$$

Dass der Grenzwert letztlich den Wert 0 liefert, folgt aus der Tatsache, dass ein sin-Term niemals einen unendlichen Wert liefert, weil $-1 \leq \sin(y) \leq 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Man hält aus den bisherigen Überlegungen fest:

Satz: *(Verhältnis unstetiger Funktionen zu Stammfunktionen)*

Unstetige Funktionen können Stammfunktionen haben, aber nicht jede unstetige Funktion hat Stammfunktionen.

Der folgende Satz klärt, in welchem Verhältnis stetige Funktionen und Stammfunktionen stehen; sein Beweis bietet unter den jetzigen Voraussetzungen große Schwierigkeiten und wird deshalb verschoben:

Satz: *(Verhältnis stetiger Funktionen zu Stammfunktionen)*

Jede stetige Funktion besitzt Stammfunktionen.

Zum Abschluss der Untersuchungen zu Stammfunktionen soll auf eine Schwierigkeit hingewiesen sein: Bei abschnittsweise definierten Funktionen muss unter Umständen mit Vorsicht an die Bestimmung einer Stammfunktion herangegangen werden.

Beisp: *(Stammfunktionen abschnittsweise definierter Funktionen)*

Wir betrachten vier auf $\mathbb{R}$ definierte Funktionen h, H_1, H_2 und H_3 und untersuchen, ob h eine der drei anderen Funktionen zur Stammfunktion haben kann. Im Einzelnen:

$$h(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$$

Die Funktion h ist überall, auch an der Stelle x=1, stetig und besitzt also eine Stammfunktion.

$$H_1(x) = \begin{cases} 2x - \frac{1}{3}x^3 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 1 \end{cases}$$

Die Funktion H_1 ist an der Stelle x=1 unstetig, weil dort der links- und rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen. Deshalb ist H_1 nicht differenzierbar, kann also keine Stammfunktion zu h sein.

$$H_2(x) = \begin{cases} 2x - \frac{1}{3}x^3 & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6} & x > 1 \end{cases}$$

Die Funktion H_2 ist in ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar, $H_2'(x) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; also ist H_2 Stammfunktion zu h.

$$H_3(x) = \begin{cases} 2x - \frac{1}{3}x^3 + c & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6} + c & x > 1 \end{cases}$$

Die Funktion H_3 ist ebenfalls stetig und differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und $H_3'(x) = h(x)$ für alle $x \in R$; also ist auch H_3 Stammfunktion zu h.