2. Funktionen

2.1 Der Begriff der Funktion

Def: *(Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge, Bild einer Funktion)*

Eine Funktion f ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element x einer Menge D_f, der Definitionsmenge von f, eindeutig genau ein Element y einer Menge W_f, der Wertemenge von f, zuordnet. Man schreibt:

$f\colon D_f \to W_f \qquad x \mapsto y$

Der Zusammenhang zwischen x und y wird dargestellt durch die Schreibweise y=f(x).

Die Teilmenge Bild(f) derjenigen Elemente von W_f, die tatsächlich einem Element aus D zugeordnet werden, heißt das Bild der Funktion f.

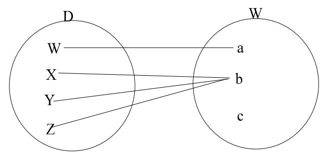
Beisp: *(Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge)*

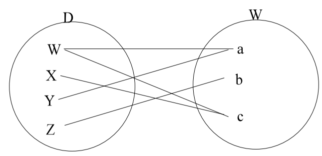
Gegeben sind die beiden Mengen $D_f = \{W, X, Y, Z\}$ und $W_f = \{a, b, c\}$. Untersuche, ob die folgenden Zuordnungsvorschriften f, g und h eine Funktion bestimmen. Es soll gelten:

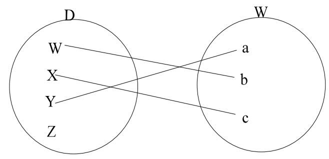
f(W) = a	f(X) = b	f(Y) = b	f(Z) = b	
g(W) = c	g(X) = c	g(W) = a	g(Z) = b	g(Y) = a
h(W) = b	h(X) = c	h(Y) = a		

Veranschaulicht man diese Zuordnungsvorschriften graphisch in Mengendiagrammen, ergeben sich folgende Abbildungen:

<table>
<tr><td>Die Zuordnungsvorschrift f beschreibt eine Funktion, denn jedem Element aus D_f wird eindeutig genau ein Element aus W_f zugeordnet. Es gilt:

Bild (f) = {a,b}</td><td>

f</td></tr>
<tr><td>Die Zuordnungsvorschrift g beschreibt keine Funktion, denn es wird zwar jedem Element aus D_f ein Element aus W_f zugeordnet, aber die Zuordnung ist nicht eindeutig, weil dem Element W_f nicht genau ein, sondern zwei Elemente aus W_f zugeordnet sind.</td><td>

g</td></tr>
<tr><td>Die Abbildungsvorschrift h beschreibt keine Funktion, weil dem Element Z der Definitionsmenge kein Element aus W_f zugeordnet ist, also nicht jedem Element aus D_f ein Element aus W_f zugeordnet ist</td><td>

h</td></tr>
</table>

Aus der Unterscheidung der Diagramme der Funktionen f, g und h findet man, dass sich die beiden wesentlichen Aspekte der Definition einer Funktion in der Sichtweise der Mengendiagramme beschreiben lassen:

- Von jedem Element von D muss ein Pfeil zu einem Element aus W ausgehen.
- Von keinem Element aus D darf mehr als ein Pfeil zu einem Element aus W ausgehen.

Sind die Elemente der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f einer Funktion f jeweils reelle Zahlen, dann veranschaulicht man Funktionen gerne im zweidimensionalen Koordinatensystem; das Ergebnis dieser Darstellung heißt Graph der Funktion f.

Def: *(Graph einer Funktion)*

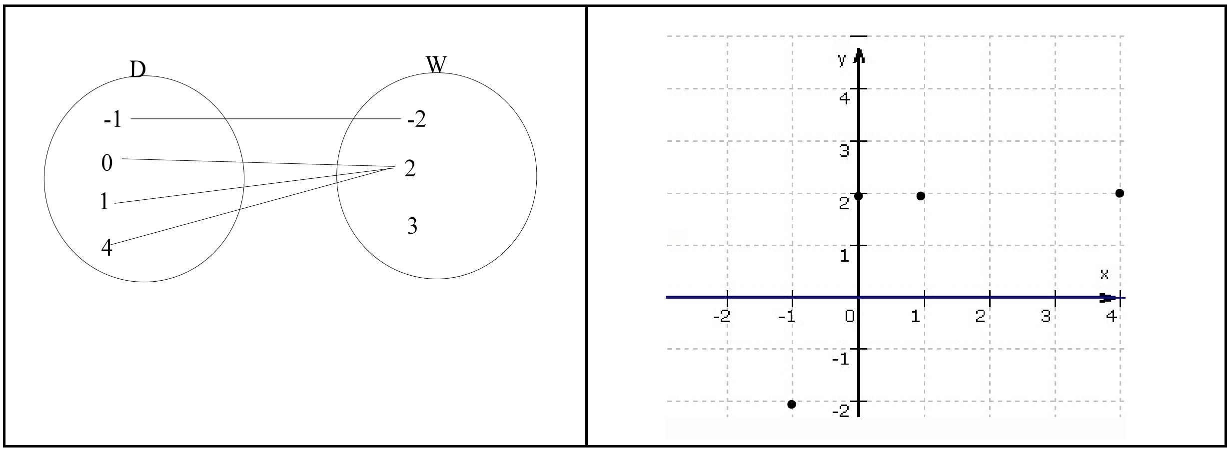
Der Graph G_f einer Funktion f ist die Menge aller Punkte (x / y) so, dass x beliebige Zahlen aus der Definitionsmenge D_f der Funktion f bedeutet und das jeweils zugehörige y durch f(x) berechnet wird. In Zeichen:

$G_f = \{ (x/y) \mid x \in D_f \wedge y = f(x)\}$

Wir nehmen zur Erläuterung der Darstellung einer Funktion durch ihren Graphen das zuletzt behandelte Beispiel wieder auf:

Beisp: *(Graph einer Funktion)*

Gegeben ist die Funktion f, welche Elemente der Definitionsmenge $D_f = \{-1, 0, 1, 4\}$ auf die Wertemenge $W_f = \{-2, 2, 3\}$ abbildet. Die Übersicht zeigt im Vergleich eine Zuordnung in Diagrammschreibweise und den Graph der Funktion f, der die Punkte (-1/-2), (0/2), (1/2) und (4/2) enthält.



Der im abgeschlossenen Beispiel gezeigte Graph einer Funktion entspricht nicht der üblichen Vorstellung von einem Funktionsgraphen, den man sich gerne als zusammenhängende Linie vorstellt. Zusammenhängende Funktionsgraphen, die als gerade oder gekrümmte Kurven ausziehbar sind, kann man nur erwarten, wenn zumindest der Definitionsbereich zusammenhängend, also zum Beispiel ein Intervall innerhalb der reellen Zahlen, ist.

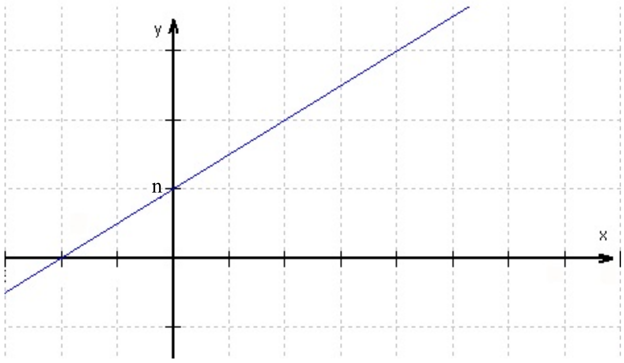
2.2 Eine Übersicht zu Funktionen der Mittelstufenmathematik

Die folgende Übersicht gibt für jede erwähnte Funktion

- die maximal mögliche Definitionsmenge D_{max},
- die Wertemenge W_f, die normalerweise der Einfachheit halber mit $W_f = \mathbb{R}$ angegeben wird,
- die Zuordnungsvorschrift über den Funktionsterm,
- die Bildmenge sowie
- den Funktionsgraphen an.

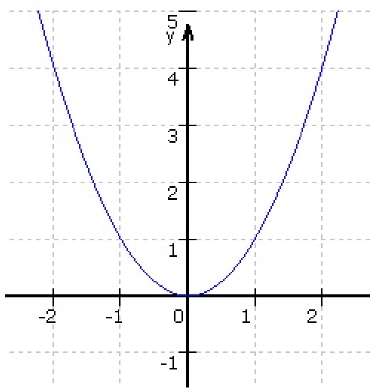
Die lineare Funktion

$D_{max} = \mathbb{R}$	$W_f = \mathbb{R}$	$f(x) = mx + n$ $(m, n \in \mathbb{R})$	$\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}$



Die Quadratfunktion (Potenzfunktion zweiten Grades)

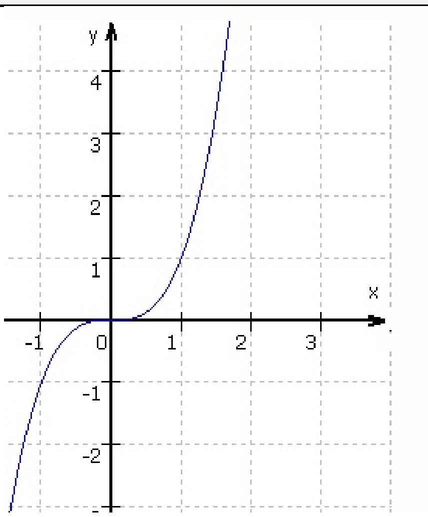
$D_{max} = \mathbb{R}$	$W_f = \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{R}_0^+$



Der Graph der Quadratfunktion ist eine Parabel und heißt Normalparabel.

Die kubische Funktion (Potenzfunktion dritten Grades)

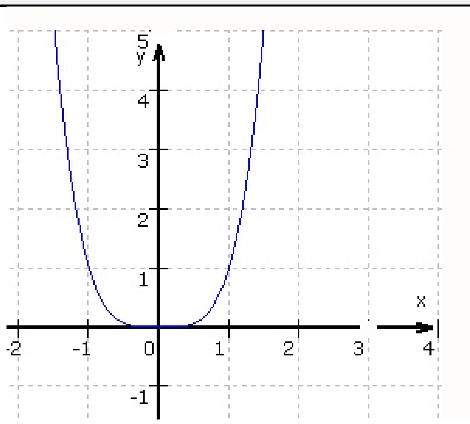
$D_{max} = \mathbb{R}$ $W_f = \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ $Bild(f) = \mathbb{R}$



Einen ähnlichen Graphen besitzen auch Potenzfunktionen mit der Gleichung $f(x) = x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), also solche mit positivem ungeradem Exponenten (nicht 1).

Die Potenzfunktion vierten Grades

$D_{max} = \mathbb{R}$ $W_f = \mathbb{R}$ $f(x) = x^4$ $Bild(f) = \mathbb{R}_0^+$



Einen ähnlichen Graphen besitzen auch Potenzfunktionen mit der Gleichung $f(x) = x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$), also solche mit positivem geradem Exponenten.

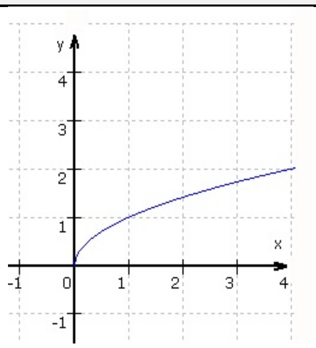
Die Potenzfunktion n-ten Grades

$D_{max} = \mathbb{R}$ $W_f = \mathbb{R}$ $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $Bild(f) = \mathbb{R}_0^+$, falls n gerade
$Bild(f) = \mathbb{R}$, falls n ungerade

Für gerade n ergibt sich als Graph eine parabelförmiger Kurvenverlauf, wobei mit steigendem n der Verlauf des Graphen über dem Intervall [-1,1] zunehmend weiter, im übrigen Bereich aber zunehmend schmaler wird; im Interesse der Anschaulichkeit vergleicht man dazu die oben gezeigten Graphen zur Quadratfunktion und zur Potenzfunktion vierten Grades. Für ungerade n ergibt sich als Graph eine geschwungene Linie, deren ungefähren Verlauf man im Fall n=3 erkennen kann. Wird der Exponent n größer, dann verharrt der zugehörige Graph im Intervall [-1,1] zunehmend länger in der Nähe der x-Achse; für betragsgroße x-Werte stellt man bei zunehmendem n einen zunehmend steileren Verlauf fest.

Die Wurzelfunktion (Wurzelfunktion zweiten Gerades)

$D_{\max} = \mathbb{R}_0^+ \qquad W_f = \mathbb{R} \qquad f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad Bild(f) = \mathbb{R}_0^+$



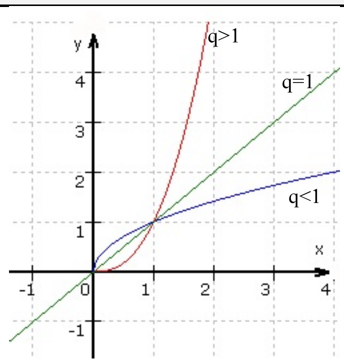
Der Graph der Wurzelfunktion ist eine Parabel.

Die Potenzfunktion mit positivem, rationalem Exponenten

$D_{\max} = \mathbb{R} \qquad W_f = \mathbb{R} \qquad f(x) = x^q \qquad Bild(f) = \mathbb{R}_0^+$, wenn $q \in \mathbb{N}$ und gerade

$D_{\max} = \mathbb{R} \qquad W_f = \mathbb{R} \qquad f(x) = x^q \qquad Bild(f) = \mathbb{R}$, wenn $q \in \mathbb{N}$ und ungerade

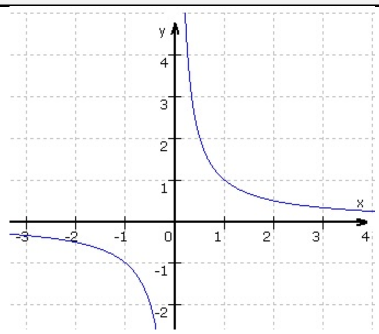
$D_{\max} = \mathbb{R}_0^+ \qquad W_f = \mathbb{R} \qquad f(x) = x^q \qquad Bild(f) = \mathbb{R}_0^+$, wenn $q \in Q^+$ und nicht ganzzahlig



Die Skizze zeigt typische Verläufe von Funktionsgraphen der Form x^q ($q \in Q^+$) im ersten Quadranten; dabei stellt man auch zeichnerisch fest, dass alle zugehörigen Graphen durch den Punkt (1/1) verlaufen.

Die Kehrwertfunktion

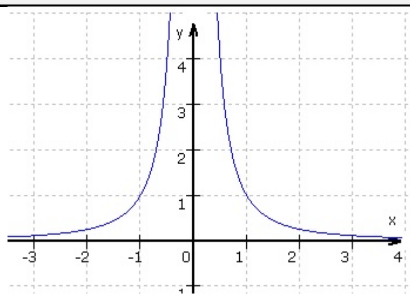
$D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad W_f = \mathbb{R} \qquad f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad Bild(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$



Der Graph der Kehrwertfunktion ist eine Hyperbel.

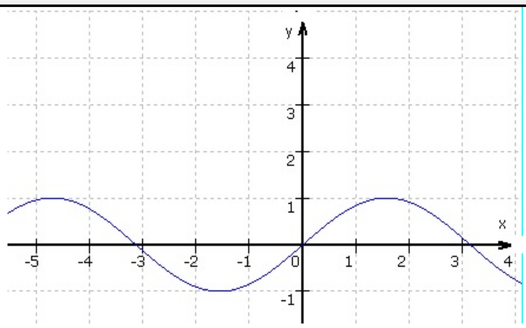
Die Kehrwertfunktion zweiten Grades

$D_{\max} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\quad W_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad Bild(f) = \mathbb{R}^+$



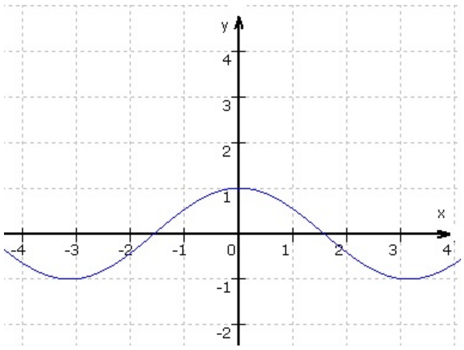
Die Sinus-Funktion

$D_{\max} = \mathbb{R}$ $\quad W_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \sin(x)$ $\quad Bild(f) = [-1, 1]$



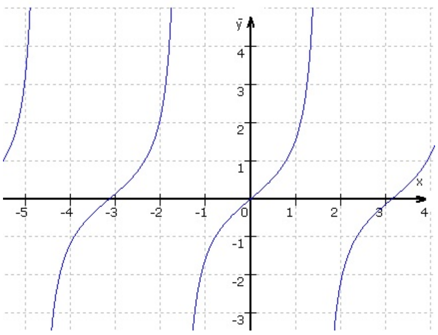
Die Cosinus-Funktion

$D_{\max} = \mathbb{R}$ $\quad W_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \cos(x)$ $\quad Bild(f) = [-1, 1]$



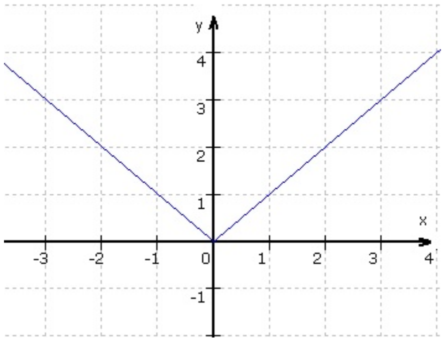
Die Tangens-Funktion

$D_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$ $\quad W_f = \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \tan(x)$ $\quad Bild(f) = \mathbb{R}$



Die Betragsfunktion

$D_{max} = \mathbb{R}$	$W_f = \mathbb{R}$	$f(x) = \vert x \vert$	$Bild(f) = \mathbb{R}_0^+$



2.3 Variationen über Funktionen

2.3.1 Die Verschiebung von Funktionsgraphen in Richtung der Koordinatenachsen

Beisp: *(Verschiebung des Graphen der Wurzelfunktion in y-Richtung)*

Punkte P(x/y) auf dem Graphen der Wurzelfunktion sind beschrieben durch die Gleichung:
$y = \sqrt{x}.$
Eine zugehörige Wertetabelle ist:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	0,00	0,71	1	1,22	1,41	1,58	1,73	1,87	2,00	2,12

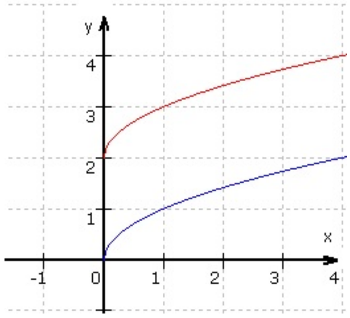
Strebt man eine Verschiebung des Graphen der Wurzelfunktion um +2 in y-Richtung an, ändert sich die Wertetabelle so, dass jeder y-Wert um 2 Einheiten erhöht wird; eine zur obigen vergleichbare Wertetabelle des um +2 in y-Richtung verschobenen Graphen ist dann:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	2,00	2,71	3	3,22	3,41	3,58	3,73	3,87	4,00	4,12

Man vergleicht die Wertetabellen und erkennt die Gleichung des verschobenen Graphen:
$y = \sqrt{x} + 2$
Äquivalent lässt sich diese Gleichung auch schreiben als:
$y - 2 = \sqrt{x}$

> Die Verschiebung des Graphen der Wurzelfunktion um +2 in y-Richtung lässt sich also rechnerisch beschreiben durch ein Ersetzen der Variable y durch den Term y-2.

Die Abbildung zeigt den Graphen der Wurzelfunktion und den verschobenen Graphen:



Beisp: *(Verschiebung des Graphen der Kehrwertfunktion in x-Richtung)*

Punkte P(x/y) der Hyperbel, die den Graph der Kehrwertfunktion beschreibt, werden bestimmt über die Gleichung:

$$y = \frac{1}{x} \ .$$

Eine zugehörige Wertetabelle ist:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	1,5	2
y	-0,5	-0,67	-1	-2	-4	--	4	2	1	0,67	0,5

Strebt man eine Verschiebung des Graphen der Kehrwertfunktion um +1 in x-Richtung an, ändert sich die Wertetabelle so, dass die y-Koordinate zu x=-2 nun zu x=-1, die y-Koordinate von x=-1,5 nun zu x=-0,5 gehört und so weiter. Eine Wertetabelle des um +1 in x-Richtung verschobenen Graphen ist also:

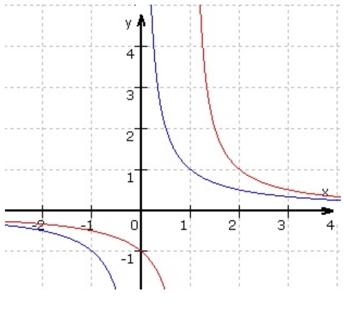
x	-1	-0,5	0	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2	2,5	3
y	-0,5	-0,67	-1	-2	-4	--	4	2	1	0,67	0,5

Eine Gleichung der um +1 in Richtung verschobenen Hyperbel ist folglich:

$$y = \frac{1}{x-1}$$

Die Verschiebung des Graphen der Kehrwertfunktion um +1 in x-Richtung lässt sich also rechnerisch beschreiben durch ein Ersetzen der Variable x durch den Term x-1.

Die Abbildungen zeigen die Hyperbel der Kehrwertfunktion und die um +1 in x-Richtung verschobene Hyperbel:



Wir verallgemeinern den Inhalt der beiden letzten Beispiele und stellen fest:

> **Satz**: *(Verschiebung von Funktionsgraphen in Richtung der Koordinatenachsen)*
>
> *Ersetzt man in der Funktionsgleichung $y = f(x)$*
>
> - *die Variable y durch den Term y-y_0,, ergibt sich* $y - y_0 = f(x)$.
>
>   *Der zur so transformierten Gleichung gehörige Graph entsteht aus dem Funktionsgraph von f durch eine Verschiebung um y_0 in Richtung der y-Achse.*
>
> - *die Variable x durch den Term x-x_0 , ergibt sich* $y = f(x - x_0)$.
>
>   *Der zur so transformierten Gleichung gehörige Graph entsteht aus dem Funktionsgraph von f durch eine Verschiebung x_0 in Richtung der x-Achse.*

2.3.2 Streckung und Stauchung von Funktionsgraphen durch konstante positive Faktoren

Streckung und Stauchung in y-Richtung durch konstante positive Faktoren

Beisp: *(Amplitude der Sinus- und Cosinus-Funktion)*

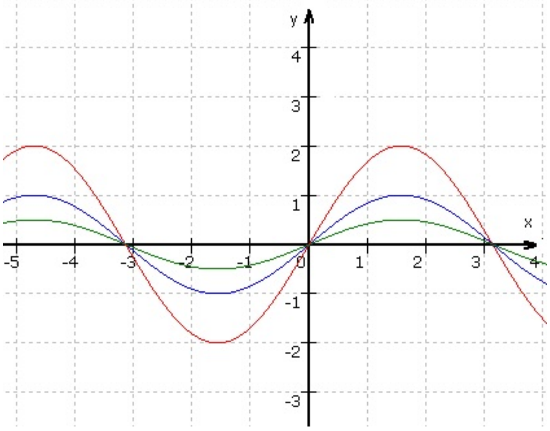
Die Gleichungen und Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion sind gegeben durch:

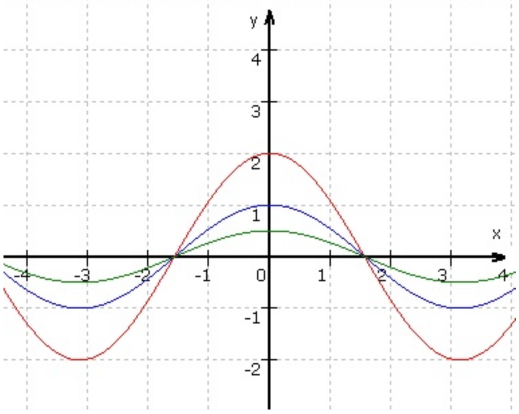
$y = s_1(x) = \sin(x)$ $\quad$ $y = c_1(x) = \cos(x)$

Wir vergleichen die Graphen dieser Funktionen mit denen der folgenden

$y = s_2(x) = 2\sin(x)$ $\quad$ $y = c_2(x) = 2\cos(x)$

$y = s_{0.5}(x) = ½ \sin(x)$ $\quad$ $y = c_{0.5}(x) = ½ \cos(x)$





Die weit ausschwingenden Graphen gehören zu den Funktionen s_2 und c_2, die eng schwingenden zu $s_{0,5}(x)$ und $c_{0,5}(x)$.

Wir stellen fest, dass sich die Multiplikation der Funktionsterme von s_1 und c_1 mit dem Faktor A=2 in einer Streckung der Funktionsgraphen ausgewirkt hat. Ein Faktor A=3 hätte zu einer noch stärkeren Streckung, A=0,25 zu einer noch stärkeren Stauchung der Graphen von s_1 und c_1 geführt.Man nennt die Zahl A Amplitude oder halbe Schwingungsweite der Sinusfunktion s_A beziehungsweise der Cosinusfunktion c_A mit den Gleichungen

$y = s_A(x) = A \sin (x)$ $\qquad$ $y = c_A (x) = A \cos (x)$.

Wir verallgemeinern das Beispiel und stellen fest:

Satz: *(Streckung und Stauchung von Funktionsgraphen in y-Richtung durch konstante positive Faktoren)*

Es gilt für eine positive reelle Zahl A, und zwei auf einem gemeinsamen Definitionsbereich D erklärte Funktionen f: $D \to \mathbb{R}$ und g: $D \to \mathbb{R}$ mit den Gleichungen

$y= f(x)$ *und* $y = g(x) = A f(x)$,

- *Ist A>1 entsteht der Graph von g aus dem Graphen von f durch eine Streckung in y-Richtung.*
- *Ist A=1 sind die Graphen von f und g gleich.*
- *Ist A<1 entsteht der Graph von g durch Stauchung des Graphen von f in y-Richtung.*

In anderer Sprechweise beschreibt man den Sachverhalt so:

Satz: *(Streckung und Stauchung von Funktionsgraphen in y-Richtung durch konstante positive Faktoren)*

Ersetzt man in der Funktionsgleichung $y = f(x)$ die Variable y durch den Term $k\cdot y$ (k>0), dann ergibt sich die Gleichung

$k\cdot y = f(x)$

- *Ist k<1, entsteht der zur transformierten Gleichung gehörige Graph von g aus dem Graphen von f durch eine Streckung in y-Richtung.*
- *Ist k=1 sind beide Graphen gleich.*
- *Ist k>1 entsteht der zur transformierten Gleichung gehörige Graph durch Stauchung des Graphen von f in y-Richtung.*

Bew: Man dividiert die transformierte Gleichung $k\cdot y = f(x)$ beidseitig durch k, findet

$$y = \frac{1}{k} \cdot f(x)$$

und interpretiert entsprechend dem ersten Satz dieses Abschnittes, indem man setzt:

$$A = \frac{1}{k}$$

Streckung und Stauchung in x-Richtung durch konstante positive Faktoren

Die Streckung und Stauchung eines Graphen in y-Richtung gelingt, wie wir gesehen haben, durch eine Ersetzung der Variablen y in der Gleichung y = f(x) durch den Term k· y. Wir erforschen nun, wie sich die Ersetzung der Variablen x durch den Term k·x auswirkt.

Beisp: *(Die Funktionenschar f_k mit der Gleichung f_k (x) = sin (k·x)*

Wir betrachten die drei Funktionen s_1, s_2 und s_3 mit den Gleichungen

$$s_1(x) = \sin(x) \qquad s_{0,5}(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \qquad s_2(x) = \sin(2x)$$

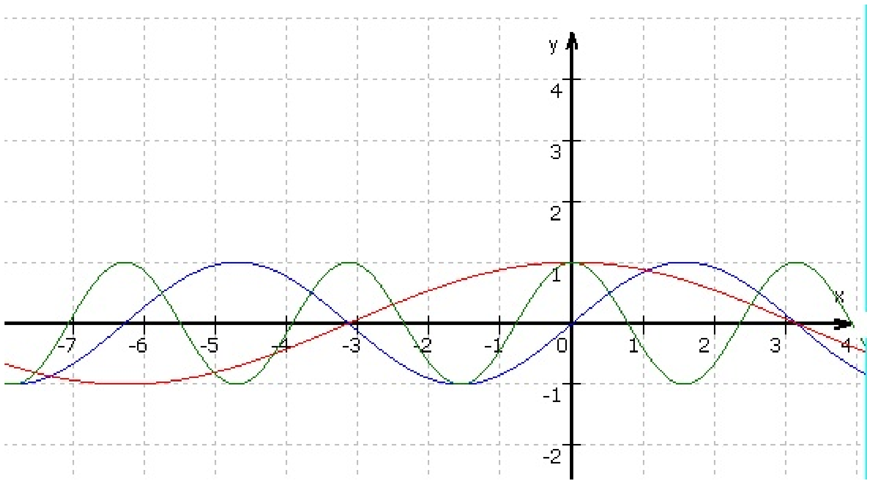
Um eine Idee zum unterschiedlichen Verhalten der drei Funktionen zu erhalten, interpretieren wir eine Wertetabelle:

x	-π	-0,75π	-0,5π	-0,25π	0	0,25π	0,5π	0,75π	π
0,5x	-0,5π	-0,375π	-0,25π	-0,125π	0	0,125π	0,25π	0,375π	0,5π
2x	-2π	-1,5π	-π	-0,5π	0	0,5π	π	1,5π	2π
s_1 (x) = sin(x)	0	-0,71	-1	-0,71	0	0,71	1	0,71	0
s_2 (x) = sin (0,5x)	-1	-0,92	-0,71	-0,38	0	0,38	0,71	0,92	1
s_3 (x) = sin (2x)	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Man stellt fest: Wenn x Werte des Intervalls [-π, π] durchläuft, durchläuft der Term 0,5x Werte des Intervalls [-0,5π, 0,5π], der Term 2x Werte des Intervalls [-2π, 2π]. Da der Graph der Sinusfunktion im Intervall [-π, π] eine Schwingung, im Intervall [-2π, 2π] zwei Schwingungen durchläuft, finden wir:

- Der Graph der Funktion s_1 absolviert im Intervall [-π, π] eine ganze Schwingung.
- Der Graph der Funktion $s_{0,5}$ zeigt im Intervall [-π, π] eine halbe Schwingung, der Graph ist gestreckt.
- Der Graph der Funktion s_2 hat im Intervall [-π, π] eine doppelte Schwingung, der Graph ist gestaucht.

Zum Vergleich die gezeichneten Graphen:



> **Satz**: *(Streckung und Stauchung von Funktionsgraphen in x-Richtung durch konstante positive Faktoren)*
>
> *Ersetzt man in der Funktionsgleichung y = f(x) die Variable x durch den Term k· x (k>0), dann ergibt sich die Gleichung*
>
> $y = f(k{\cdot}x)$
>
> - *Ist k<1, entsteht der zur transformierten Gleichung gehörige Graph von g aus dem Graphen von f durch eine Streckung in x-Richtung.*
> - *Ist k=1 sind beide Graphen gleich.*
> - *Ist k>1 entsteht der zur transformierten Gleichung gehörige Graph durch Stauchung des Graphen von f in x-Richtung.*

2.3.3 Spiegelungen von Funktionsgraphen an den Koordinatenachsen, einfache Symmetrie

Spiegelung von Funktionsgraphen an der x-Achse

> Ein einzelner Punkt P(x/y) eines Funktionsgraphen zu einer Funktion f wird an der x-Achse in den Punkt P'(x/-y) gespiegelt. Da P auf dem Graphen von f liegt, gilt y = f(x). Man spiegelt also den Punkt P(x/f(x)) in P'(x/-f(x)). Der gespiegelte Graph gehört seinerseits wieder zu einer Funktion, die mit f den Definitionsbereich gemeinsam hat, und deren Gleichung lautet: y=-f(x).

Beisp: *(Spiegelung eines Funktionsgraphen an der x-Achse)*

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = 1 + \sqrt{x + 2}$$

Der maximal mögliche Definitionsbereich von f ist vorgegeben durch:

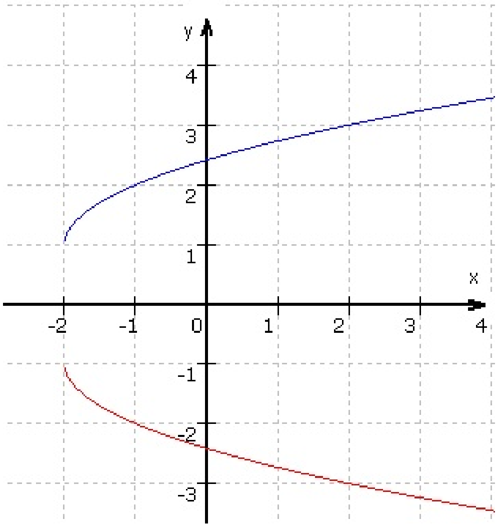
$D_{max} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x+2 \geq 0 \} = [-2,\infty[$

Der Graph dieser Funktion geht aus dem der Wurzelfunktion hervor durch eine Verschiebung um -2 in x-Richtung und um +1 in y-Richtung.

Spiegelt man den Graphen von f an der x-Achse erhält man den Graph der ebenfalls auf D_{max} erklärten Funktion g mit der Gleichung:

$g(x) = -f(x) = -(1 + \sqrt{x+2}) = -1 - \sqrt{x+2}$

Die Zeichnung zeigt die Graphen von f und g:



Symmetrie von Kurven zur x-Achse

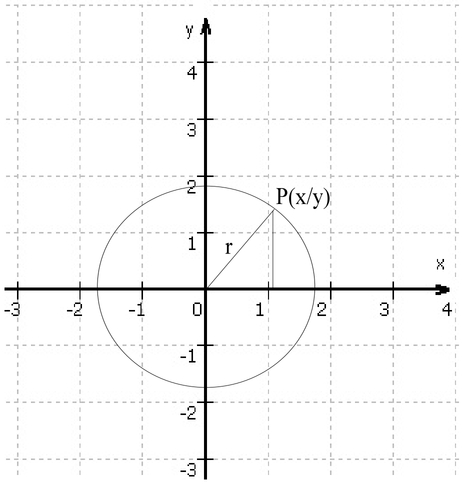
Def: *(Symmetrie von Kurven zur x-Achse)*

Eine Kurve heißt symmetrisch zur x-Achse, wenn mit jedem Kurvenpunkt P(x/y) auch der Punkt P'(x/-y) zu ihr gehört.

Beim Umgang mit zur x-Achse symmetrischen Kurven ist - aus Sicht der Schulmathematik - Vorsicht angebracht:

Zur x-Achse symmetrische Kurven, die nicht gleich der x-Achse selbst sind, sind nicht Graphen einer Funktion, weil es dann x-Werte gibt, denen mindestens zwei y-Werte zugeordnet sind; damit ist die Grundbedingung für Funktionen verletzt, dass jedem x eindeutig genau ein y zugeordnet sein muss.

Beisp: *(Der Kreis, eine zur x-Achse symmetrische Kurve)*



Unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras findet man die Bedingung dafür, dass ein Punkt P(x/y) auf dem Einheitskreis liegt und damit die Gleichung des Kreises k:

k: $x^2 + y^2 = r^2$

Der Kreis lässt sich insgesamt nicht durch eine Funktionsgleichung der Form “y = ...” beschreiben, weil zu jedem $x \in]-r,r[$ genau zwei Kreispunkte und damit zwei verschiedene y-Werte vorliegen. Wohl aber lassen sich jeweils der obere und untere Halbkreis als Graph einer Funktion darstellen, wenn man die Kreisgleichung nach y auflöst:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y^2 = r^2 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2} \vee y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Damit ergibt sich für den oberen Halbkreis die Funktion: ***ko***: $[-1,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$

Für den unteren Halbkreis ku findet man die Funktion: ***ku***: $[-1,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -\sqrt{r^2 - x^2}$

Spiegelung von Funktionsgraphen an der y-Achse

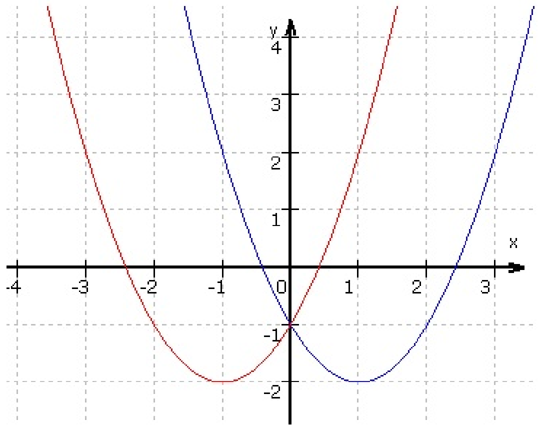
Ein einzelner Punkt P(x/y) eines Funktionsgraphen zu einer Funktion f wird an der y-Achse in den Punkt P’(-x/y) gespiegelt. Da P auf dem Graphen von f liegt, gilt y = f(x). Man spiegelt also den Punkt P(x/f(x)) in P’(-x/f(x)). Der gespiegelte Graph gehört seinerseits wieder zu einer Funktion, deren Definitionsbereich alle Elemente des Definitionsbereiches von f mit entgegengesetztem Vorzeichen enthält, und deren Gleichung lautet y = f(-x).

Beisp: *(Spiegelung eines Funktionsgraphen an der y-Achse)*

Gegeben sind die Funktionen f und g durch:

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto (x-1)^2 - 2$ *g*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto (-x-1)^2 - 2$

Die in der folgenden Skizze rechts gezeichnete Parabel gehört zu f, die rechts zu g.



Die Umrechnung der Funktionsgleichung von g in Scheitelpunktsform ergibt:

$g(x) = (-x-1)^2 - 2 = \left((-1)\cdot(x+1)\right)^2 - 2 = (x+1)^2 - 2$

Damit passt diese Betrachtung mit früheren Ergebnissen zur Verschiebung von Graphen zusammen.

Symmetrie von Funktionskurven zur y-Achse

Def: *(Symmetrie von Kurven zur y-Achse)*

Eine Kurve heißt symmetrisch zur y-Achse, wenn mit jedem Kurvenpunkt P(x/y) auch der Punkt P'(-x/y) zu ihr gehört.

In der Anwendung auf Funktionsgraphen finden wir:

Satz: *(Symmetrie von Funktionsgraphen zur y-Achse)*

Der Graph einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist symmetrisch zur y-Achse, wenn D symmetrisch zum Ursprung ist, also mit jedem x auch -x im Definitionsbereich liegt, und für alle $x \in D$ gilt:

$f(-x) = f(x)$

Beisp: *(Untersuchung von Graphen einiger Polynomfunktionen auf Symmetrie zur y-Achse)*

Gegeben sind die Funktionen

$f_1\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^4 - x^2 + 1$
$f_2\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^4 - x^2 + 1$
$f_3\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^4 - x^3 + 1$

- Zur Funktion f_1 gehört ein zur y-Achse symmetrischer Graph, weil der Definitionsbereich symmetrisch zum Ursprung liegt und gilt:

  $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1 = f(x)$ für alle $x \in D$

- Zur Funktion f_2 gehört kein zur y-Achse symmetrischer Graph, weil der Definitionsbereich D Zahlen x enthält, deren Gegenzahl -x nicht in D liegt; zum Beispiel liegt zwar x=2 im Definitionsbereich, nicht aber x=-2.

- Zur Funktion f_3 gehört kein zur y-Achse symmetrischer Graph, obwohl ihr Definitionsbereich symmetrisch ist; denn:

  $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^3 + 1 = x^4 - (-x^3) + 1 = x^4 + x^3 + 1$

  Für x=1 etwa gilt damit $f(x) = f(1) = 1$; $f(-x) = f(-1) = 3 \neq f(1)$

Drehspiegelung am Ursprung

Eine Drehspiegelung des Graphen einer Funktion f entsteht als Ergebnis der Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen:

- Der Graph wir zunächst an der x-Achse gespiegelt, wobei jedem Punkt P(x/f(x)) auf dem Funktionsgraph der Spiegelpunkt P'(x/-f(x)) zugeordnet wird.

- Der Ergebnisgraph der Spiegelung an der x-Achse wird einer Spiegelung an der y-Achse unterworfen; dadurch wird der Punkt P'(x/-f(x)) in den Punkt P''(-x/-f(x)) gespiegelt.

Ein einzelner Punkt P(x/f(x)) eines Funktionsgraphen zu einer Funktion f wird also bei Drehspiegelung am Ursprung in den Punkt P''(-x/-f(x)) abgebildet. Der gespiegelte Graph gehört seinerseits wieder zu einer Funktion, deren Definitionsbereich alle Elemente des Definitionsbereiches von f mit entgegengesetztem Vorzeichen enthält, und deren Gleichung lautet y = -f(-x).

Beisp: *(Drehspiegelung eines Parabelstücks am Ursprung)*

Drehspiegele den Graph der Funktion f am Ursprung, wobei:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto (x-1)^2 + \frac{1}{2}$$

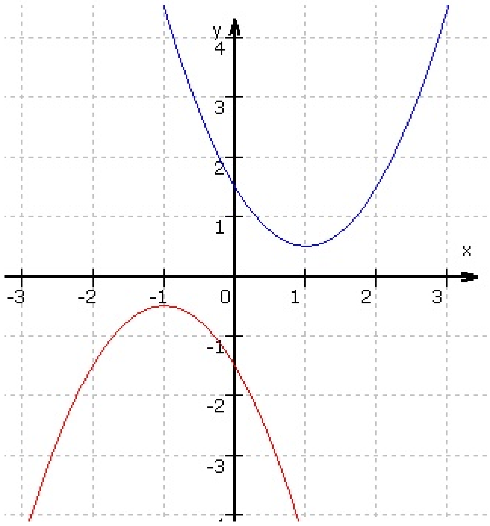
Die Drehspiegelung ergibt den Graph einer Funktion g mit

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto -\left(((-x)-1)^2 + \frac{1}{2}\right)$$

Die Umformung der Funktionsgleichung von g in Scheitelpunktsform ergibt:

$$g(x) = -\left(((-x)-1)^2 + \frac{1}{2}\right) = -\left(\left((-1)\cdot(x+1)\right)^2 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$-\left((x+1)^2 + \frac{1}{2}\right) = -(x+1)^2 - \frac{1}{2}$$



Punktsymmetrie von Funktionsgraphen zum Ursprung

Def: *(Punktsymmetrie von Kurven zur y-Achse)*

Eine Kurve heißt punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn mit jedem Kurvenpunkt P(x/y) auch der Punkt P'(-x/-y) zu ihr gehört.

Wenden wir diese Definition auf Funktionsgraphen an, erhalten wir:

Satz: *(Punktsymmetrie zum Ursprung)*

Der Graph einer Funktion f verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn der Definitionsbereich D von f mit jedem x auch -x enthält, und für alle $x \in D$ gilt:

$f(-x) = -f(x)$

Beisp: *(Untersuchung der Graphen von Polynomfunktionen auf Punktsymmetrie zum Ursprung)*

Gegeben sind die Funktionen

f_1: $[-2,2] \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^5 - x$

f_2: $[-1,2] \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^5 - x$

f_3: $[-2,2] \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^5 - x + 1$

- Zur Funktion f_1 gehört ein zum Ursprung punktsymmetrischer Graph, weil der Definitionsbereich symmetrisch zum Ursprung liegt und gilt:

  $f(-x) = (-x)^5 - (-x) = - x^5 + x = -f(x)$ für alle $x \in D$

- Zur Funktion f_2 gehört kein zum Ursprung punktsymmetrischer Graph, weil der Definitionsbereich D Zahlen x enthält, deren Gegenzahl -x nicht in D liegt; zum Beispiel liegt zwar x=2 im Definitionsbereich, nicht aber x=-2.

- Zur Funktion f_3 gehört kein zum Ursprung punktsymmetrischer Graph, obwohl ihr Definitionsbereich symmetrisch ist; denn:

  $f(-x) = (-x)^5 - (-x) + 1 = -x^5 + x + 1$

  Für x=1 etwa gilt damit $f(x) = f(1) = 1$; $f(-x) = f(-1) = 1 \neq -f(1)$

2.3.4 Lineare Transformation der Variablen einer Funktion

Dieser Abschnitt fasst die vorhergehenden über Verschiebung, Streckung, Stauchung und Spiegelung von Funktionsgraphen in einer geschlossenen Theorie zusammen. Im Gegensatz zu vorher wird diesmal aber nicht von der geometrischen Situation ausgehend auf zugehörige Funktionsgleichungen geschlossen, sondern von der Form der Funktionsgleichungen ausgegangen.

Lineare Transformation der Variable x in der Funktionsgleichung y = f(x)

Def: (*Lineare Transformation der Variablen x in der Funktionsgleichung y = f(x)*)

Die Ersetzung der Variablen x durch den Term ax+b in der Funktionsgleichung y=f(x) führt zu dem Funktionsausdruck y=f(ax+b) und heißt lineare Transformation der Variablen x.

Auf dem Weg zu einem umfassenden Verständnis der linearen Transformation der Variablen x untersuchen wir zunächst anhand eines Beispiels auftretende typische Einzelfälle, wobei die in den vorhergehenden Abschnitten gewonnenen Ergebnisse unmittelbar angewendet und untereinander verknüpft werden:

Beisp. *(Ausgewählte Beispiele zur Funktionsgleichung y = sin (ax+b)*)

Wir betrachten sieben Funktionen der Funktionenschar $f_{a,b}$ mit:
$f_{a,b}: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sin(ax + b)$

a	b	Gleichung
1	0	$y = f_1(x) = \sin(x)$
-1	0	$y = f_2(x) = f_1(-x) = \sin(-x)$
2	0	$y = f_3(x) = f_1(2x) = \sin(2x)$
-2	0	$y = f_4(x) = f_1(-2x) = \sin(-2x)$
1	$-\pi$	$y = f_5(x) = f_1(x-\pi) = \sin(x-\pi)$
2	-2π	$y = f_6(x) = f_1(2(x-\pi)) = \sin(2(x-\pi)) = \sin(2x-2\pi)$
-2	2π	$y = f_7(x) = f_1(-2(x-\pi)) = \sin(-2(x-\pi)) = \sin(-2x+2\pi)$

Eine Wertetabelle vermittelt Ideen, wie die einzelnen Funktionen auseinander hervorgehen:

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f_1(x) = \sin(x)$	0	-0,707	-1	-0,707	0	0,707	1	0,707	0
-x	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$
$f_2(x) = \sin(-x)$	0	0,707	1	0,707	0	-0,707	-1	-0,707	0
2x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f_3(x) = \sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
-2x	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$f_4(x) = \sin(-2x)$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$x - \pi$	-2π	$-\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
$f_5(x) = \sin(x - \pi)$	0	0,707	1	0,707	0	-0,707	-1	-0,707	0
$2(x - \pi)$	-4π	$-\frac{7\pi}{2}$	-3π	$-\frac{5\pi}{2}$	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0
$f_6(x) = \sin(2(x-\pi))$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$-2(x-\pi)$	4π	$\frac{7\pi}{2}$	3π	$\frac{5\pi}{2}$	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	0
$f_7(x) = \sin(-2(x-\pi))$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

Mit Hilfe der Wertetabelle und dem Wissen aus früheren Abschnitten stellt man fest:

- Der Graph von f_2 geht aus dem von f_1 durch Spiegelung an der y-Achse hervor, weil bei Anwendung von f_2 das Argument -x der sin-Funktion die gleichen Zahlenwerte in umgekehrter Reihenfolge wie das Argument x bei Anwendung von f_1 annimmt.

- Der Graph von f_3 geht aus dem von f_1 durch Stauchung um den Faktor 2 hervor.

- Der Graph von f_4 geht aus dem von f_3 durch Spiegelung an der y-Achse hervor, weil bei Anwendung von f_4 das Argument -2x der sin-Funktion die gleichen Zahlenwerte in umgekehrter Reihenfolge wie das Argument 2x bei Anwendung von f_3 annimmt. Also geht der Graph von f_4 aus dem von f_1 durch Stauchung um den Faktor 2 und anschließende Spiegelung an der y-Achse hervor.

- Der Graph von f_5 geht aus dem von f_1 durch eine Verschiebung um π in positiver x-Richtung hervor, wie man aus dem Vergleich der Zeilen “x” und “x-π” entnimmt.

- Der Graph von f_6 geht aus dem von f_5 durch eine Stauchung um den Faktor hervor. Also entsteht der Graph von f_6 aus dem von f_1 durch eine Verschiebung um π in positiver x-Richtung und anschließender Stauchung um den Faktor 2 hervor.

- Der Graph von f_7 geht aus dem von f_6 durch Spiegelung an der y-Achse hervor, weil bei Anwendung von f_4 das Argument $-2(x-\pi)$ der sin-Funktion die gleichen Zahlenwerte in umgekehrter Reihenfolge wie das Argument $2(x-\pi)$ bei Anwendung von f_3 annimmt.

Im Allgemeinen findet man vergleichbar dem Beispiel:

Satz: *(Lineare Transformation der Variablen x in der Funktionsgleichung y = f(x))*

Ersetzt man in der auf D definierten Funktionsgleichung $y = f(x)$ die Variable x durch den Term $ax+b$ ($a \neq 0$), erhält man die Funktionsgleichung $y = f(ax+b)$. Ist diese gewonnene Funktionsgleichung auf D definiert, dann erhält man ihren zugehörigen Graph aus dem Graph von f durch wahlweise Kombination einer Stauchung beziehungsweise Streckung in Richtung der x-Achse, einer Spiegelung an der y-Achse oder einer Verschiebungen in Richtung der x-Achse ermittelt werden. Im einzelnen treten folgende der genannten geometrischen Bewegungselemente auf:

- *eine Spiegelung an einer Parallelen zur y-Achse, entstanden aus einer Spiegelung an der y-Achse gepaart mit einer Verschiebung in x-Richtung, falls $a<0$,*

- *eine Stauchung in Richtung der x-Achse um den Faktor $|a|$, falls $|a|>1$,*

- *eine Streckung in Richtung der x-Achse um den Faktor $|a|$, falls $|a|<1$,*

- *eine Verschiebung in Richtung der x-Achse, wenn $b \neq 0$.*

  Die Verschiebung verläuft in positiver x-Richtung, wenn a und b verschiedene Vorzeichen aufweisen, in negativer x-Richtung, falls a und b vorzeichengleich sind. Der Betrag der Verschiebung ist gleich dem Betrag des Quotienten von b durch a.

Lineare Transformation der Variablen y in der Funktionsgleichung y = f(x)

Die Ergebnisse der linearen Transformation der Variablen y sind denen der linearen Transformation der Variablen x ähnlich.

Satz: *(Lineare Transformation der Variablen y in der Funktionsgleichung y = f(x))*

Ersetzt man in der auf D definierten Funktionsgleichung y = f(x) die Variable y durch den Term ay+b (a≠0), erhält man die Gleichung ay+b = f(x) und daraus die Funktionsgleichung

$$y = \frac{1}{a} f(x) - \frac{b}{a}$$

Die gewonnene Funktionsgleichung ist auf D definiert, und man erhält den zugehörigen Graph aus dem Graph von f durch wahlweise Kombination einer Stauchung beziehungsweise Streckung in Richtung der y-Achse, einer Spiegelung an der x-Achse oder einer Verschiebungen in Richtung der y-Achse. Im einzelnen treten folgende der genannten geometrischen Bewegungselemente auf:

- *eine Spiegelung an einer Parallelen zur x-Achse, entstanden aus einer Spiegelung an der x-Achse gepaart mit einer Verschiebung in y-Richtung falls a<0,*

- *eine Stauchung in Richtung der y-Achse um den Faktor |a|, falls |a|>1,*

- *eine Streckung in Richtung der y-Achse um den Faktor |a| , falls |a|<1,*

- *eine Verschiebung in Richtung der y-Achse, wenn b≠0.*

  Die Verschiebung verläuft in positiver y-Richtung, wenn a und b verschiedene Vorzeichen aufweisen, in negativer y-Richtung, falls a und b vorzeichengleich sind. Der Betrag der Verschiebung ist gleich dem Betrag des Quotienten von b durch a.

2.3.5 Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division von Funktionen

Stimmt der Definitionsbereich zweier Funktionen f und g überein, beziehungsweise erklärt man f und g nur dort, wo beide definiert sind, also auf dem Durchschnitt der beiden Definitionsbereiche D_f und D_g ,dann kann man auf gewohnte Weise erklären, was die Summe, die Differenz und das Produkt von f und g sein soll. Bei der Division von f und g muss man außerdem den Sonderfall einer möglichen Division durch 0 in Betracht ziehen. Damit ergibt sich:

Def: *(Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Funktionen)*

Sind zwei Funktionen f und g über

$f\colon D_f \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \qquad g\colon D_g \to \mathbb{R} \quad x \mapsto g(x)$

gegeben, dann versteht man unter deren Summe f+g, Differenz f-g und Produkt f·g:

$f+g\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) + g(x)$
$f-g\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) - g(x)$
$f\cdot g\colon D_f \cap D_g \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$

Der Quotient von f und g ist erklärt durch die Funktion

$$\frac{f}{g} : \left\{ x \mid x \in D_f \cap D_g \wedge g(x) \neq 0 \right\} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Beisp: *(Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier Funktionen)*

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch

$f\colon [-3,2] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x+3 \qquad g\colon [-2,4] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2-1$

Mit $D_f \cap D_g = [-2,2]$ ergibt sich für die Summenfunktion f+g, die Differenzfunktion f-g und Produktfunktion f·g von f und g:

$f+g\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ und $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x+3 + x^2 - 1 = x^2 + x + 2$

$f-g\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ und $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x+3 - x^2 + 1 = -x^2 + x + 4$

$f\cdot g\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ und $(f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+3) \cdot (x^2 - 1) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

Bei der Quotientenfunktion von f und g sind die Nullstellen 1 und -1 von g zu berücksichtigen, die zu einer unerlaubten Division durch 0 führen; man findet:

$$\frac{f}{g} : [-2,2] \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{x^2-1}$$

1.3.8 Hintereinanderausführung von Funktionen

Wir starten die Untersuchungen zur Hintereinanderausführung zweier Funktionen mit einem Beispiel:

Beisp: *(Hintereinanderausführung zweier Funktionen)*

Gegeben sind die beiden Funktion f und g durch ihre Funktionsgleichungen:

$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^3 - 1$

Definieren wir beide Funktion jeweils auf ihrem maximal möglichen Definitionsbereich erhalten wir: $D_f = \mathbb{R}_0^+$ und $D_g = \mathbb{R}$.

Ist h_1 die Hintereinanderausführung von g nach f, erhält man:

$$h_1(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 - 1$$

Der maximal mögliche Definitionsbereich von h_1 ist $\mathbb{R}_0^+$.

Für die Hintereinanderausführung von f nach g findet man die Funktion h_2 mit der Gleichung

$$h_2(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = \sqrt{x^3 - 1}$$

Der maximal mögliche Definitionsbereich von h_2 ergibt sich aus der Bedingung $x^3 - 1 \geq 0$. Der maximal mögliche Definitionsbereich von h_2 ist also gleich dem Intervall $[1,\infty[$.

Der Vergleich der Funktionsterme der beiden Hintereinanderausführungen h_1 und h_2 führt zu der Bemerkung:

> Die Hintereinanderausführung zweier Funktionen f und g ist nicht kommutativ, das heißt, die Ausführung “f nach g” unterscheidet sich im allgemeinen von der Ausführung “g nach f”.

Wir vergleichen weiter bei beiden Hintereinanderausführungen h_1 und h_2, wie sich jeweils der Definitionsbereich ergeben hat.

- Bei h_1, der Hintereinanderausführung von g nach f, wird jedem x, das zunächst von f abgebildet wird, ein Bild y zugeordnet, welches problemlos von g weiter abgebildet werden kann. Der Definitionsbereich von h_1 ist also gleich dem Definitionsbereich von f, der zuerst abgearbeiteten Funktion.

- Bei h_2, der Hintereinanderausführung von f nach g, wird nicht jedem x, das zunächst von g abgebildet wird, ein Bild y zugeordnet, welches von g weiter abgebildet werden könnte, weil manche dieser y einen negativen Wert aufweisen, der bei Anwendung der Wurzelfunktion f nicht als Eingabegröße gestattet ist. Zum Beispiel liefert x=-2 unter der Abbildung durch g den Funktionswert y=-9, der nicht in der Definitionsmenge von der Wurzelfunktion f liegt.

  Der Definitionsbereich von h_2 ist also eine Teilmenge des Definitionsbereiches von g, der zuerst abgearbeiteten Funktion.

> Der Definitionsbereich der Hintereinanderausführung zweier Funktionen f und g ist eine Teilmenge des Definitionsbereiches der zuerst ausgeführten Funktion:

Die im Rahmen der Hintereinanderausführung zweier Funktionen verwendeten Begriffe werden in der folgenden Definition erklärt:

Def: *(Hintereinanderausführung zweier Funktionen, innere und äußere Funktion)*

Sind f und g zwei Funktionen mit Definitionsbereichen D_f und D_g, dann ist die Hintereinanderausführung $h = g \circ f$ (lies: "g nach f") definiert als folgende Funktion:

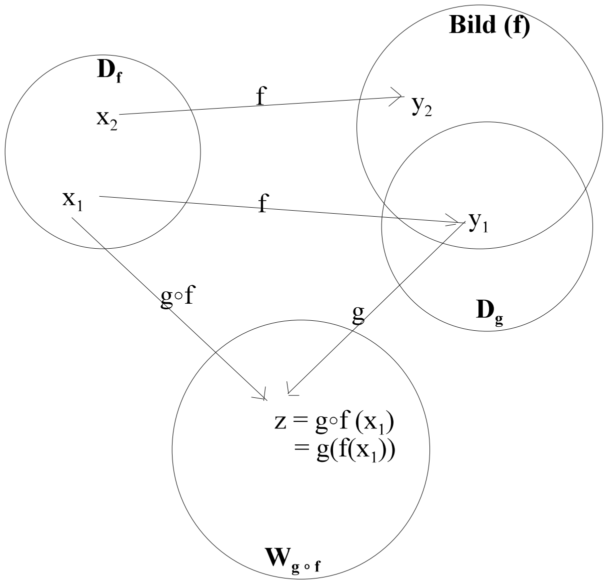
$h: \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} \to \mathbb{R}$ *und* $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Die Funktion f heißt die innere Funktion der Hintereinanderausführung, g die äußere Funktion der Hintereinanderausführung.

Die Graphik zeigt, unter welchen Umständen im allgemeinen die Hintereinanderausführung $g \circ f$ der beiden Funktionen f und g gelingt beziehungsweise misslingt:

Eine Zahl $x_1 \in D_f$ ist unter der Funktion $g \circ f$ abbildbar und liegt damit im Definitionsbereich von $g \circ f$, wenn ihr Funktionswert $y_1 = f(x_1)$ im Definitionsbereich D_g der Funktion g liegt. Der Definitionsbereich von $g \circ f$ ist folglich, wie wir weiter oben schon feststellen konnten, eine Teilmenge von D_f.

Eine Zahl $x_2 \in D_f$ ist dann nicht unter der Funktion $g \circ f$ abbildbar, wenn ihr Funktionswert $y_2 = f(x_2)$ nicht im Definitionsbereich D_g der Funktion g liegt.



Beisp: *(Hintereinanderausführung im Zusammenhang mit der Betragsfunktion)*

Gegeben sind die Funktion f und die Betragsfunktion g über ihre Gleichungen:

$$f(x) = (x+1)^2 - 4 \qquad g(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Beide Funktionen sind auf $\mathbb{R}$ definiert. Wir untersuchen die Funktionen $h_1 = g \circ f$ und $h_2 = f \circ g$. Für deren Funktionsgleichungen gilt:

$$h_1(x) = g(f(x)) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)^2 - 4 & (x+1)^2 - 4 \geq 0 \\ -(x+1)^2 + 4 & (x+1)^2 - 4 < 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 - 4 & x \leq -3 \vee x \geq 1 \\ -(x+1)^2 + 4 & -3 < x < 1 \end{cases}$$

$$h_2(x) = f(g(x)) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)^2 - 4 & x \geq 0 \\ (-x+1)^2 - 4 & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)^2 - 4 & x \geq 0 \\ (x-1)^2 - 4 & x < 0 \end{cases}$$

Man entnimmt der rechnerischen Behandlung des Beispiels, dass die Betragsfunktion bei einer Hintereinanderausführung

- in der Rolle als äußere Funktion eine Spiegelung des unterhalb der x-Achse verlaufenden Teils des Graphen der inneren Funktion an der x-Achse bewirkt,

- in der Rolle als innere Funktion den Graphen der äußeren Funktion so verändert, dass dessen links der y-Achse liegende Zweig durch eine Spiegelung des rechts der y-Achse liegenden Zweiges an der y-Achse ersetzt wird.