1.1 Einleitung

Was ist Mathematik? Darauf eine Antwort zu geben, haben sich berühmte Leute vorgenommen; zum Beispiel gibt es ein etwas älteres, sehr bekannt gewordenes Buch von Richard COURANT und Herbert ROBBINS mit eben diesem Namen "Was ist Mathematik?". In diesem Einleitungskapitel soll wenigstens ein Blick auf einige Methoden der Mathematik ermöglicht werden.

Mathematik ist ein System von Sätzen, streng genommen ohne Bezug zur Wirklichkeit, das sich auf einigen Axiomen gründet. Axiome sind nicht weiter begründbare Grundaussagen über Beziehungen zwischen Elementen irgendwelcher Mengen, mit denen sich die Mathematik beschäftigen will; die Axiome müssen ein widerspruchsfreies System bilden. Aus den Axiomen werden weitere Sätze gefolgert, aus den Sätzen wieder neue Sätze und so weiter, bis das Gebäude der Mathematik im heutigen Stand dasteht. Um einen Eindruck zu erhalten, was Axiome konkret bedeuten können, hier die Axiome von PEANO, auf denen die Theorie der Zahlen aufbaut. Die PEANO-Axiome erklären, wie die Menge der natürlichen Zahlen festgelegt ist; der Bau der Menge der natürlichen Zahlen ist also eine Tatsache, die wohl jeder für vernünftig hält, die man aber nicht beweisen kann, es sei denn, man nähme andere Aussagen als Axiome an und würde die PEANO-Axiome mit diesen beweisen können.

Axiome: *(Peano-Axiome)*

1. *1 ist eine natürliche Zahl.*
2. *Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.*
3. *Keine natürliche Zahl hat 1 als Nachfolger.*
4. *Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.*
5. *Irgendeine Teilmenge M der natürlichen Zahlen, welche die Zahl 1 und zu jeder ihrer Zahlen auch deren Nachfolger enthält, ist gleich der Menge aller natürlichen Zahlen.*

Das Axiom 5 von PEANO heißt das Axiom der vollständigen Induktion. Es leitet uns zu einer wesentlichen Methode, wie man die PEANO-Axiome nützen kann, um viele mathematische Sätze, die mit natürlichen Zahlen zu tun haben, beweisen zu können.

1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Ein Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion wird in zwei Schritten geführt:

Bei der **Induktionsverankerung** wird die Behauptung für die kleinste der natürlichen Zahlen, für die sie gelten soll, nachgewiesen. Der **Induktionsschritt** beweist den Satz "Wenn die Aussage für eine natürliche Zahl n gilt, gilt sie auch für deren Nachfolger n+1." Man nimmt also im Induktionsschritt an, dass die Aussage für ein n gelte; ganz gewagt ist diese Annahme nicht, denn man hat ja in der Verankerung bereits für wenigstens eine Zahl die Behauptung verifiziert. Aus der Annahme, dass die Aussage für ein n gilt, schlussfolgert man auf die Gültigkeit der Behauptung für deren Nachfolger n+1.

Mit diesen beiden Schritten hat man

- einen direkten Nachweis der Behauptung für die kleinste natürliche Zahl, für die sie gelten soll,

- einen Mechanismus, der von der Gültigkeit der Aussage für die kleinste Zahl, zur Gültigkeit der Aussage bei der nächstkleineren, von dort zur nächsten usw. führt.

Die **praktische Ausführung des Induktionsschrittes** beinhaltet folgende Tätigkeiten:

- Man ersetzt in der für eine Zahl n formulierten Beweisbehauptung die Zahl n durch den Term n+1 und erhält damit eine Formulierung der Beweisbehauptung für die Zahl n+1.

- Man sucht in den Termen, die bei Formulierung der Beweisbehauptung für n+1 entstehen, Ausdrücke, die aus der Formulierung der Beweisbehauptung für n bekannt sind mit dem Ziel, die für n postulierte Formel anzuwenden.

Es folgen nun typische Beispiele, die zeigen, wie man mit Hilfe der vollständigen Induktion Beweise führen kann.

Satz: *(Teilbarkeit)*

Jede natürliche Zahl x die man schreiben kann als $x = 9^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) ist durch 8 teilbar.

Bew: **Induktionsverankerung**:

Für n=1 gilt: $9^1 - 1 = 8$ ist durch 8 teilbar.

Induktionsschritt:

Wir nehmen an: "9^n-1 ist durch 8 teilbar" und beweisen unter dieser Voraussetzung die Behauptung "$9^{n+1} - 1$ ist durch 8 teilbar".

$$9^{n+1} - 1 = 9^{n+1} - 9 + 8 = 9\cdot(9^n - 1) + 8$$

Also ist der Term $9^{n+1} - 1$ darstellbar als Summe zweier Summanden, die beide durch 8 teilbar sind; denn 9^n-1 ist nach der Annahme durch 8 teilbar, also auch $9\cdot(9^n-1)$, und 8 ist sowieso durch 8 teilbar. Damit ist der Term $9^{n+1}-1$ durch 8 teilbar.

Zahlentheoretische Probleme gehören nicht zum Stoff des Leistungskurses Mathematik; die eben vorgestellte Aufgabe hat ihren Platz wegen ihrer Kürze und einfachen Problemstellung als Modellaufgabe zur Beweisführung durch vollständige Induktion erhalten. Die nächste Klasse von Aufgabenstellungen zur vollständigen Induktion findet jedoch schon im Kapitel “Integralrechnung” zahlreiche Anwendungen; gemeint sind Aufgaben mit Summenausdrücken.

Beisp: *(Summenzeichen)*

Für die Summe 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 schreibt man kurz: $\sum_{i=1}^{8} i$

und liest diese Schreibweise als "Summe von i=1 bis 8 über i".

Analog schreibt man für die Summe 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n kurz: $\sum_{i=1}^{n} i$ und liest "Summe von i=1 bis n über i". Variiert man weiter, kann man etwa schreiben:

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=2}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)^2$$

Im Allgemeinen schreibt man:

Def: *(Summenzeichen)*

Ist A(i) ein in Abhängigkeit von der Variablen i erklärter Term, der für fortlaufende Werte natürlicher Zahlen von i=k, ..., i=l (l≥k) definiert ist, dann bedeutet:

$$\sum_{i=k}^{l} A(i) = A(k) + A(k+1) + \ldots + A(l-1) + A(l)$$

k heißt untere Grenze der Summe, l die obere Grenze der Summe, i der Laufindex.

Eine spezielle Unterart der Summen sind die Potenzsummen:

Def: *(Potenzsumme)*

Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{i=1}^{n} i^a \qquad (a \in \mathbb{N})$$

heißt Potenzsumme.

Für Potenzsummen lassen sich Formeln finden, die den Summenwert ohne Summezeichen angeben; deren Beweis wird mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt. Ein Beispiel:

Satz: *(Summe der ersten n Zahlen)*

Für beliebiges n ∊ ℝ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Bew: **Induktionsverankerung**

Für n=1 erkennt man:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

Induktionsschritt

Wir haben zu zeigen

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1) \cdot (n+1+1)}{2}$$

unter der Voraussetzung

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Man rechnet:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = n+1 + \sum_{i=1}^{n} i = n+1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} =$$

$$\frac{2n + 2 + n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Vergleichbar, wenn auch mit größerem rechnerischen Aufwand, beweist man auch die Formeln für die Summe der Quadrate und der Kuben:

Satz: *(Formeln für die Potenzsummen zweiten und dritten Grades)*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

Wie so oft ist die Methode, mit der man auf eine Formel kommt, interessanter als ihr Beweis; auf die Formeln für Potenzsummen kann man etwa durch Experimente mit den binomischen Formeln kommen, die nun ergänzend anhand zweier Beispiele erläutert werden.

Beisp: *(Auffinden der Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen)*

Man verifiziert mit Hilfe der binomischen Formeln leicht die folgende Zeile:

$(i+1)^2 - i^2 = i^2 + 2i + 1 - i^2 = 2i + 1$

Nun setzt man Zahlen von 1 bis n in diese Gleichung ein und summiert, wie in der folgenden Tabelle dargestellt, auf:

i	$(i+1)^2 - i^2$	$2i + 1$
1	$2^2 - 1^2$	$2 + 1$
2	$3^2 - 2^2$	$4 + 1$
3	$4^2 - 3^2$	$6 + 1$
...	...	...
n-1	$n^2 - (n-1)^2$	$2(n-1) + 1$
n	$(n+1)^2 - n^2$	$2n + 1$
Summen	$(n+1)^2 - 1^2$	$n\cdot 1 + 2\cdot(1+2+...+n)$

Aus der tabellarischen Auswertung nimmt man mit:

$$(n+1)^2 - 1^2 = n + 2\,(1 + 2 + ... + n) \Leftrightarrow n^2 + 2n = n + 2 \sum_{i=1}^{n} i \Leftrightarrow$$

$$\frac{n^2 + n}{2} = \sum_{i=1}^{n} i \Leftrightarrow \frac{n\,(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i$$

Beisp: *(Auffinden der Formel für die Summe der Kuben der ersten n natürlichen Zahlen)*

Mit Hilfe der binomischen Formel dritten Grades findet man:

$(i+1)^3 - i^3 = i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$

Wieder setzt man die Zahlen von 1 bis n in das Ergebnis ein:

i	$(i+1)^3 - i^3$	$3i^2 + 3i + 1$
1	$2^3 - 1^3$	$3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1$
2	$3^3 - 2^3$	$3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1$
3	$4^3 - 3^3$	$3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1$
...	...	...
n-1	$n^3 - (n-1)^3$	$3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$
n	$(n+1)^3 - n^3$	$3n^2 + 3n + 1$
Summen	$(n+1)^3 - 1^3$	$3(1^2+2^2+...+n^2) + 3(1+2+...+n) + n$

Aus der Tabelle liest man ab und rechnet weiter:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + n \Leftrightarrow$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3\,n\,(n+1)}{2} + n \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3\ n\ (n+1)}{2} - n \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n - 3\ n\ (n+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n\ (n+1)\ (2n+1)}{2}$$

Eine weitere Problemstellung, die sich mit dem Verfahren der vollständigen Induktion erforschen lässt, ist das Herausfinden von Ableitungsformeln für Ableitungen beliebig hohen Grades. Solche Nachforschungen sind keine brotlose Kunst: Man kann die Ergebnisse verwenden, jedoch liegen die Anwendungsmöglichkeiten (z. B. TAYLOR-Reihen) außerhalb des aktuellen Schul-Stoffplans, sind aber später in diesem Skript dargestellt.

Beisp: *(Finden einer Ableitung beliebig hohen Grades)*

Gegeben sei die Funktion f über ihre Gleichung $f(x) = \frac{1+x}{3+x}$

Suche eine Formel für die n-te Ableitung dieser Funktion und beweise diese dann mit Hilfe der vollständigen Induktion!

Da man hier zunächst, wie in den meisten Fällen, im Dunkeln tappt, wie die gesuchte Formel aussehen könnte, leitet man einfach ein paar Mal die gegebene Funktion ab und beobachtet, ob man Prinzipien erkennen kann.

$$f(x) = \frac{1+x}{3+x} \qquad f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{(3+x)^2}$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{2}{(3+x)^3} \qquad f'''(x) = 2 \cdot \frac{2 \cdot 3}{(3+x)^4}$$

$$f^{(iv)}(x) = -2 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(3+x)^5}$$

Man erkennt folgende Grundsätze: Das Vorzeichen wechselt von Mal zu Mal; man nennt so etwas ein alternierendes Vorzeichen. Der Grad des Nenners wächst jeweils um 1. Der Zähler baut sich jeweils um den Faktor auf, der gerade der Nummer der berechneten Ableitung entspricht. Also vermutet man folgende Formel für alle natürlichen Zahlen n:

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{(3+x)^{n+1}}$$

Zum Beweis:

Induktionsverankerung für n=1

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 2 \cdot (-1)^{1-1} \cdot \frac{1!}{(3+x)^{1+1}} = 2 \cdot \frac{1}{(3+x)^{1+1}}$$

Für n=1 ist die Formel damit nachgewiesen.

Induktionsschritt

Hier geht es wieder darum, aus der Annahme, dass die vermutete Formel für n richtig ist, die Richtigkeit für n+1 zu bestätigen. Dazu leitet man $f^{(n)}$ einmal ab und überprüft, ob das Ergebnis mit dem Term übereinstimmt, der sich ergibt, wenn man n+1 in die vermutete Formel einsetzt.

$$f^{(n)\prime}(x) = 2\cdot(-1)^{n-1}\cdot n!\cdot\frac{-(n+1)\cdot(3+x)^n}{(3+x)^{(n+1)\cdot 2}} =$$

$$2\cdot(-1)^n\cdot\frac{(n+1)!}{(3+x)^{n+2}}$$

Man stellt die Identität mit dem aus der Formel ermittelten Term für $f^{(n+1)}$ fest. Damit ist der Beweis erbracht, die Formel ist richtig.

Komplizierter im Beweis sind häufig sogenannte Abschätzungen, also Ungleichungen.

Satz: *(Ungleichung von BERNOULLI)*

a sei eine reelle Zahl, für die gilt: a > -1.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die BERNOULLIsche Ungleichung: $(1+a)^n \geq 1 + a\cdot n$

Bew: **Induktionsverankerung** für n=1

$(1+a)^1 \geq 1 + a\cdot 1$ Die Behauptung ist für n=1 richtig.

Induktionsschritt

Unter der Annahme $(1+a)^n \geq 1 + n\cdot a$ zeigen wir:

$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\cdot a$

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1 + n\cdot a)\cdot(1 + a) =$

$1 + a + n\cdot a + n\cdot a^2 = 1 + (n+1)\cdot a + n\cdot a^2 \geq 1 + (n+1)\cdot a$

Beisp: *(Rechnerische Anwendung der BERNOULLI-Ungleichung)*

Beantworte die Frage: Wie groß ist die Zahl y mit $y = 0{,}9999^{400}$

a) mindestens b) höchstens

Die Frage b) kann man guten Gewissens ohne schwere Mathematik beantworten mit y<1. Zur Antwort auf Frage a) leistet die BERNOULLI-Ungleichung gute Dienste:

$0{,}9999^{400} = (1 - 0{,}0001)^{400} \geq 1 - 0{,}0001 \cdot 400 = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

Zur Qualität der Abschätzung in diesem Beispiel zieht man den Taschenrechner hinzu; er liefert auf 5 Stellen

$y = 0{,}96079.$

Die Verankerung eines Induktionsbeweises erscheint oft so primitiv, dass man sich wundert, warum das denn nötig ist. Zum Beleg, dass man die Verankerung tatsächlich braucht, hier ein Beispiel für einen offensichtlich falschen Satz, bei dem der Induktionsschritt funktioniert, wenn man die Verankerung weglässt.

Beisp: *(Ein verunglückter Beweis)*

Man behauptet die Aussage A(n): Jede natürliche Zahl der Form $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) ist eine gerade Zahl.

Unter "Vergessen" der Verankerung "beweist" man den Induktionsschritt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ mühelos.

z.z. $2n + 1$ gerade $\Rightarrow$ $2 \cdot (n+1) + 1$ gerade

$2 \cdot (n+1) + 1 = 2n + 2 + 1 = (2n + 1) + 2$

Damit ergibt sich der Term $2 \cdot (n+1) + 1$, weil Summe zweier gerader Zahlen, als gerade.

Man sieht also, dass man unter Weglassen der Verankerung auch offensichtlichen Unsinn beweisen kann.

Wenn man genau hinschaut (und auch etwas erkennt), gehen Beweise über natürliche Zahlen manchmal viel leichter ohne statt mit vollständiger Induktion. Zur Übung kann man den folgenden Satz zunächst einmal mit vollständiger Induktion beweisen und danach unten nachlesen.

Satz: *(Teilbarkeit)*

Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

Bew: Man formt ein wenig um.

$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$

Wir stellen fest: Die Zahl $x = n^3 - n$ ist darstellbar als ein Produkt von drei aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen also mindestens eine durch zwei und genau eine durch drei dividierbar sein muss. Also lässt sich das Produkt durch 6 teilen.

1.3 All- und Existenzaussagen

Die meisten mathematischen Sätze und Axiome sind als Allaussagen oder als Existenzaussagen formuliert. Zum Beispiel sind die Sätze, die man vollständiger Induktion beweist, sämtlich Allaussagen; dazu passen

Redewendungen wie "Für jede natürliche Zahl gilt..." oder "Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$...". Eine Existenzaussage steckt zum Beispiel im ersten Axiom von PEANO; dieses hieß: "1 ist eine natürliche Zahl." Dieser kurze Satz beinhaltet insbesondere die Aussage "Es gibt eine natürliche Zahl"; ihr Name "1" spielt keine große Rolle.

Im letzten Beweisbeispiel des vorangegangenen Kapitels ist es gelungen, eine Allaussage auf direktem Wege durch logisches Schließen zu beweisen; diese Methode des direkten Beweises erfordert aber oft den zündenden Einfall, den man nicht immer hat. Deshalb ist es günstig, noch einige weitere Methoden zur Hand zu haben, wie man einen Beweis angehen kann.

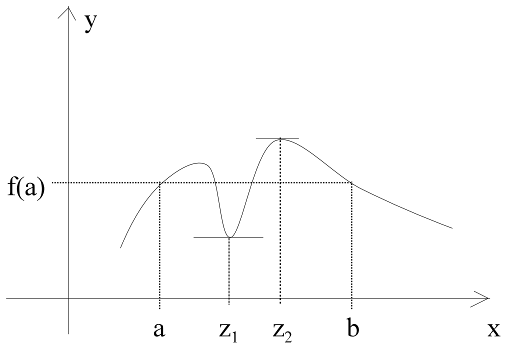
Nachweis von Existenzaussagen

Existenzaussagen belegt man in der Regel anhand eines Beispiels; man versucht ein Element anzugeben, das die geforderte Eigenschaft hat.

Manchmal kann man aber auch nur die bloße Existenz nachweisen, ohne konkret ein Element angeben zu können. Ein solches Ergebnis ist der folgende Satz, dessen Beweis wir aber nicht führen, sondern nur graphisch plausibel machen. Die darin genannte Zahl z ist in der Allgemeinheit des Satzes nicht zu lokalisieren, aber man weiß, dass es sie gibt.

Satz: *(Satz von ROLLE)*

Ist f eine auf dem Intervall [a,b] stetige und im Intervall]a,b[differenzierbare Funktion, gilt außerdem $f(a) = f(b)$, dann gibt es im Intervall]a,b[mindestens eine Zahl z, für die gilt: $f'(z) = 0$.



Der Satz "Für alle x gilt A." ist verneint durch "Es gibt ein x, für das A nicht gilt." Die Verneinung einer Allaussage ist also eine Existenzaussage. Entsprechend gilt:

Widerlegen von Allaussagen

Allaussagen werden durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

Beisp: *(Ein widerlegbares Ergebnis über Primzahlen)*

Setzt man in den Term $n^2 + n + 41$ natürliche Zahlen ein, so stellt man fest, dass fortlaufend Primzahlen herauskommen. Hier die ersten 30 Einsetzungen für n; alle ergeben Primzahlen.

n	n^2+n+41	n	n^2+n+41	n	n^2+n+41
1	43	11	173	21	503
2	47	12	197	22	547
3	53	13	223	23	593
4	61	14	251	24	641
5	71	15	281	25	691
6	83	16	313	26	743
7	97	17	347	27	797
8	113	18	383	28	853
9	131	19	421	29	911
10	151	20	461	30	971

Ohne weiter nachzudenken könnte man vermuten, dass vielleicht eine Formel für gewisse Primzahlen gefunden wäre, dass also folgender Satz richtig wäre: Alle Zahlen x der Form $x = n^2 + n + 41$ ($n \in \mathbb{N}$) sind Primzahlen. Diese Behauptung hält schon einfachen Überlegungen nicht stand. Die Einsetzung n=41 liefert ein Gegenbeispiel, weil $41^2 + 41 + 41$ den Teiler 41 aufweist, also keine Primzahl ist.

Übrigens: Auch n = 40 liefert keine Primzahl mehr; man rechnet:

$40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41 \cdot 41.$

Hinter dieser Rechnung steckt ein allgemeinerer Rechentrick, den man für das Quadrieren von Zahlen, die um 1 größer als eine runde Zahl sind, verwenden kann. Nennen wir die zu quadrierende Zahl y, dann ist die genannte runde Zahl gleich y-1.

$(y-1)^2 + y-1 + y = y^2 - 2y + 1 + y - 1 + y = y^2$

Konkret: $1001^2 = 1000^2 + 1000 + 1001 = 1\,002\,001$

1.4 Implikationen und Äquivalenzen

Def: *(Aussage, Implikation und Äquivalenz)*

Eine Aussage ist ein Satz, der mit dem Wert wahr oder mit dem Wert falsch belegt werden kann.

Sind A und B zwei Aussagen, dann heißt ein wahrer Satz der sprachlichen Struktur "Wenn A, dann B" eine Implikation, A heißt Voraussetzung, B Folgerung. Man schreibt A⇒B.

Sind A und B zwei Aussagen, dann heißt ein wahrer Satz der sprachlichen Struktur "A genau dann, wenn B" eine Äquivalenz von A und B. Man schreibt A⇔B.

Über Wahrheitstafeln erkennt man, wann ein Wenn-dann-Satz eine Implikationen ist und wann Äquivalenzen vorliegen: Implikationen erhält man, wenn man aus falschen Voraussetzungen folgert (dann geht nämlich alles) oder (das ist der übliche Fall), wenn man aus einer wahren Voraussetzung einen wahren Schluss erhält. Äquivalenzen erhält man dann, wenn A den gleichen Wahrheitswert wie B aufweist.

A	B	A⇔B	A⇒B
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	w
f	f	w	w

Sind A und B Aussagen und ist die Implikation A ⇒ B wahr (kurz: Folgt B aus A) dann heißt A **hinreichende Bedingung** für B und B **notwendige Bedingung** für A.

Diese auf den ersten Zugriff merkwürdigen Bezeichnungen decken sich mit dem Sprachgebrauch: Wir nehmen das Standardbeispiel der Logiker zur Erklärung:

Beisp: *(Regen)*

Wir bezeichnen: A “Es regnet.”, B “Die Straße ist nass.”, A⇒B “Wenn es regnet, ist die Straße nass.”

Tatsächlich: Es braucht nur zu regnen, schon ist die Straße nass; Regen allein ist also hinreichend für Nässe auf der Straße. Umgekehrt ist es dann so, dass, wenn die Straße nicht nass ist, es gerade auch nicht regnen kann. Die Nässe auf der Straße ist notwendig, um überhaupt an Regen denken zu können. Hinreichend ist die Straßennässe als Regenindiz aber nicht, weil die Straße auch auf andere Weise nass geworden sein kann.

Zurück zur Mathematik mit einem Beispiel aus der vorigen Klassenstufe:

Satz: *(Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0)*

a) *Jede an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion f ist an dieser Stelle stetig. Differenzierbarkeit an der Stelle x_0 ist eine für die Stetigkeit dort hinreichende Bedingung.*

b) *Nicht jede an einer Stelle x_0 stetige Funktion ist dort auch differenzierbar. Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 nicht stetig, dann ist sie dort auch nicht differenzierbar. Stetigkeit an der Stelle x_0 ist somit notwendige Voraussetzung der Differenzierbarkeit an der Stelle x_0*

Bew: a) Voraussetzung: f differenzierbar an der Stelle x_0 ⇔ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Behauptung: f stetig an der Stelle x_0 ⇔ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Wir formen die Behauptung mit Hilfe der Voraussetzung so lange um, bis wir zweifelsfrei deren Wahrheitsgehalt erkennen:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

b) Hier genügt die Angabe des Beispiels einer Funktion, die an einer Stelle x_0 stetig, aber nicht differenzierbar ist. Ein solches Beispiel finden wir in der Betragsfunktion f an der Stelle x_0=0. Deren Gleichung ist gegeben durch:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

f ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$, denn

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -x = 0 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0 = f(0)$$

f ist nicht differenzierbar an der Stelle $x_0 = 0$, denn der Grenzwert des Differenzenquotienten ist nicht ermittelbar, weil:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-x-0}{x} = -1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x-0}{x} = 1$$

Die sich anschließende Aussage *“Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 nicht stetig, dann ist sie dort auch nicht differenzierbar.”* ist äquivalent zu der unter a), denn im allgemeinen ist der Wahrheitsgehalt der Implikation “A⇒B” zweier Aussagen A und B gleich dem Wahrheitsgehalt der Implikation “nicht B ⇒ nicht A”, wie wir unten sehen unter dem Stichwort Kontraposition sehen.

Äquivalenznachweise sind manchmal unmittelbar schwierig, weil komplex; deshalb teilt man in solchen Fällen gern das Problem in zwei Hälften.

Teilen eines Äquivalenznachweises in zwei Implikationsnachweise

Äquivalenznachweise zerlegt man gerne in zwei Teile, denn $A \Leftrightarrow B$ trifft genau dann zu, wenn $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$.

Die folgende Wahrheitstafel zeigt, dass dieses Verfahren sinnvoll ist:

A	B	A⇒B	B⇒A	A⇒B ∧ B⇒A	B⇒A
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

Satz: *(Zur y-Achse symmetrische Graphen ganzrationaler Funktionen vierten Grades)*

Zeige: Der Graph einer ganzrationalen Funktion f 4.Grades mit der Gleichung

$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn in seinem Funktionsterm nur gerade Potenzen von x auftauchen.

Bew: Wir unterscheiden folgende Aussagen:
A Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse
B Im Funktionsterm von f tauchen nur gerade Potenzen von x auf.

Zu zeigen ist die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$. Wir zerlegen den Beweis in zwei Teile.

Teil 1: Zeige $A \Rightarrow B$

G_f symmetrisch zur y-Achse $\Rightarrow f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_4(-x)^4 + a_3(-x)^3 + a_2(-x)^2 + a_1(-x) + a_0 \Rightarrow$

$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 \Rightarrow$

$a_3x^3 + a_1x = - a_3x^3 - a_1x \Rightarrow$

Ein Koeffizientenvergleich der Restterme liefert:

$a_3 = - a_3 \quad \wedge \quad a_1 = - a_1 \quad \Rightarrow \quad 2a_3 = 0 \wedge 2a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = 0 \ \wedge \ a_1 = 0$

Also ist $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ und Teil 1 ist bewiesen.

Teil 2: Zeige $B \Rightarrow A$

Im Funktionsterm von f tauchen nur gerade Potenzen von x auf $\Rightarrow$

$$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 \;\Rightarrow\; f(-x) = a_4(-x)^4 + a_2(-x)^2 + a_0 = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = f(x)$$

Also ist für alle $x \in \mathbb{R}$ $f(x)=f(-x)$, und damit ist der G_f symmetrisch zur y-Achse.

Wir schließen mit zwei logischen Tricks, die man verwendet, um Implikationen nachzuweisen.

Beweis durch Annahme des Gegenteils

A sei eine wahre Aussage. Oft ist es leichter, eine Implikation $A \Rightarrow B$ nicht direkt zu beweisen, sondern anzunehmen, dass aus A das Gegenteil von B, also $\neg B$, folge. Dann versucht man, die Irrigkeit dieser Annahme zu zeigen; dazu legt man dar, dass die Folgerung $\neg B$ nicht auf A beruhen kann, dass also A falsch sein müsste, wenn daraus $\neg B$ folgen sollte. Man verwickelt also die irrige Annahme in einen Widerspruch und schließt daraus, dass ihr Gegenteil gelten muss, (... welches man schließlich beweisen wollte). Man nennt diese Technik "Beweis durch Annahme des Gegenteils"

Der folgende Satz liefert ein entsprechendes Beispiel:

Satz: *(Irrationalität von $\sqrt{2}$)*

Zeige: Wenn $x^2 = 2$, dann ist x keine rationale Zahl. Kurz: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Bew: Voraussetzung ist $x^2 = 2$. Wir nehmen nun (falsch) an, dass x ist trotz dieser Voraussetzung rational sei. Daraus folgt, dass es zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ gibt, die keine gemeinsamen Teiler haben, mit deren Hilfe man x als gekürzten Bruch schreiben kann.

Die daraus entstehende Formel bearbeitet man weiter:

$$x = \frac{p}{q} \;\Rightarrow\; x^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \;\Rightarrow\; p^2 = 2 \cdot q^2$$

Also hat p^2 den Teiler 2, damit hat auch p den Teiler 2, weil p und p^2 die gleichen Primfaktoren aufweisen. Also gibt es eine natürliche Zahl p_1 mit $p = 2 \cdot p_1$. Damit ist:

$$p^2 = 2 \cdot q^2 \;\Rightarrow\; (2 \cdot p_1)^2 = 2 \cdot q^2 \;\Rightarrow\; 4 \cdot p_1^{\,2} = 2 \cdot q^2 \;\Rightarrow\; 2 \cdot p_1^{\,2} = q^2$$

Also hat q^2 den Teiler 2, damit auch q.

Wir finden, dass sowohl p als auch q den Teiler 2 haben, obwohl wir doch p und q als teilerfremde Zahlen festgelegt hatten (...ohne damit einen Fehler zu begehen). Damit ist die Annahme, dass x eine rationale Zahl sei, zum Widerspruch geführt.

Beweis durch Kontraposition

Gelegentlich kann man sich den Wahrheitsgehalt eines Wenn-dann-Satzes klarer machen, wenn man ihn umformuliert und ausnützt, dass der Satz “Wenn ¬B, dann ¬A” die gleichen Wahrheitswerte “Wenn A, dann B” aufweist. Man nennt diese Technik “Beweis durch Kontraposition”.

Die folgende Wahrheitstafel zeigt die Zulässigkeit des Verfahrens der Kontraposition.

A	B	¬A	¬B	A⇒B	¬B⇒¬A
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Wir beweisen den oben schon nachgewiesenen Satz über den Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit an einer Stelle x_0 ein zweites Mal durch Kontraposition.

***Satz**:* *(Zusammenhang zwischen stetigen und differenzierbaren Funktionen)*

Wenn eine Funktion f auf ihrem Definitionsbereich D differenzierbar ist, dann ist sie dort auch stetig.

Wir bezeichnen: Aussage A bedeutet “f ist differenzierbar an der Stelle x_0.”, B bedeutet “f ist stetig auf an der Stelle x_0.”.

Bew: Zu zeigen ist die Implikation ¬B⇒¬A, die zu A⇒B gleichwertig ist.

¬B bedeutet: f ist nicht stetig auf D, das heißt, es gibt ein $x_0 \in D$, wo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

¬A bedeutet: f ist nicht differenzierbar auf D, das heißt, es gibt ein $x_1 \in D$, wo

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \quad \text{nicht definiert ist.}$$

An der Stelle $x_1 = x_0$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten von positiv oder negativ unendlichem Wert, also nicht definiert, weil der Zähler $f(x) - f(x_1) = f(x) - f(x_0)$ für $x \to x_0$ nicht 0 ergibt; denn es ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) \neq 0$$

f ist also an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.